



## **PROJETO DE GRADUAÇÃO**

# **ANÁLISE DE GUIAS DE ONDAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Por,  
**Kleverson Carvalho de Sousa**

**Brasília, julho de 2015**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica**

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ANÁLISE DE GUIAS DE ONDAS VIA MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS**

por,

**Kleverson Carvalho de Sousa**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico.

**Banca Examinadora**

ADRIANO TODOROVIC FABRO  
(Orientador)

---

ÉDER LIMA DE ALBUQUERQUE

---

MARCUS VINICIUS GIRÃO DE  
MORAIS

---

Brasília, julho de 2015

## RESUMO

A hipótese de estruturas periódicas é muito usada em várias aplicações em engenharia, indo de plataformas de petróleo a projetos aeroespaciais. Tais estruturas podem ter seu comportamento vibroacústico interpretado através de suas propriedades de propagação de ondas, como uma alternativa à interpretação modal, fornecendo diferentes informações para análise e projeto. Em geral, estruturas com geometrias e materiais complexos não permitem soluções analíticas e algum método numérico é necessário. O presente trabalho estuda os aspectos de implementação e interpretação física de um método numérico de propagação de ondas, o método de Ondas e Elementos Finitos (WFE). Neste trabalho, são analisadas estruturas simples, unidimensionais, com solução analítica. O número de onda e as velocidades de fase e grupo são definidas e conceitualmente exploradas. Em seguida o método WFE é aplicado, e as características de propagação do guia de onda são calculadas através de um modelo de Elementos Finitos de uma fatia de sua seção transversal. O método permite extrair aspectos de interpretação física da dinâmica das estruturas analisadas que a interpretação puramente modal não permitiria.

**Palavras chave:** Ondas e elementos finitos. Guia de onda. Propagação de onda.

---

## ABSTRACT

The assumption of periodic structures is widely used in engineering application, such as oil platform and aerospace design. Such structures can have their vibroacoustic behaviour interpreted by their wave characteristics, as an alternative to the modal interpretation, providing extra information for analysis and design. In general, structures with complex material and geometry do not have available analytical solution therefore requiring some numerical approach. This work study implementation and physical interpretation aspects of a numerical approach for wave propagation, the Wave and Finite Element Method (WFE). In this work, simple and one-dimensional structures with analytical solution are analysed. The wavenumber, group and phase velocity are defined. The method allows a physical interpretation from the dynamics of the structure under analysis that a purely modal approach would not capture.

**Keywords:** Wave and Finite Elements. Waveguide. Wave propagation.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. ESCOPO .....	1
1.2. OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS .....	1
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	1
<b>2. REVISÃO TEÓRICA.....</b>	<b>3</b>
2.1. PROPAGAÇÃO DE ONDAS E GUIAS DE ONDA .....	3
2.2. CARACTERÍSTICAS DAS ONDAS.....	3
2.3. TIPOS DE ONDAS .....	6
2.3.1. ONDAS LONGITUDINAIS EM SÓLIDOS .....	6
2.3.2. ONDAS QUASE-LONGITUDINAIS EM SÓLIDOS .....	7
2.3.3. ONDAS TRANSVERSAIS (CISALHANTES) EM SÓLIDOS .....	8
2.3.4. ONDAS FLEXURAIS EM VIGAS .....	10
2.4. PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM PLACAS FINAS SIMPLEMENTE APOIADAS .....	11
2.5. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS .....	14
2.6. MATRIZ DE RIGIDEZ DINÂMICA .....	14
<b>3. ANÁLISE POR WFE.....</b>	<b>17</b>
3.1. MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA.....	17
3.2. ENERGIA E POTÊNCIA DO SISTEMA .....	19
3.2.1. ENERGIAS CINÉTICA E POTENCIAL .....	19
3.2.2. POTÊNCIA .....	20
3.3. CRITÉRIOS DE GARANTIA (WAC E MAC) .....	21
<b>4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....</b>	<b>22</b>
4.1. BARRA ESBELTA .....	22
4.2. VIGA EULER-BERNOULLI.....	23
4.3. PLACA FINA E ESBELTA INFINITA.....	25
<b>5. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>28</b>
5.1. BARRA ESBELTA .....	28
5.2. VIGA EULER-BERNOULLI.....	29
5.3. PLACA FINA E ESBELTA.....	32
<b>6. CONCLUSÕES E PASSOS FUTUROS .....</b>	<b>36</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>37</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>39</b>
PROGRAMA PARA VERIFICAÇÃO DE RELAÇÃO DE DISPERSÃO DE BARRA ESBELTA: .....	39
PROGRAMA PARA VERIFICAÇÃO DE RELAÇÃO DE DISPERSÃO DE VIGA EULER-BERNOULLI .....	40
PROGRAMA PARA VERIFICAÇÃO DE RELAÇÃO DE DISPERSÃO DE PLACA INFINITA SIMPLEMENTE APOIADA.....	42
SUBMATRIZES DA MATRIZ DE MASSA DE ELEMENTO RETANGULAR .....	47
SUBMATRIZES DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTO RETANGULAR.....	47

# LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Tipos de onda segundo a forma: (a) propagante, número de onda puramente real; (b) atenuante, número de onda complexo; e (c) evanescente, número de onda puramente imaginário. ....	4
Figura 2.2 - Perturbação não dispersiva ao longo do tempo e espaço – a onda mantém a forma em todos os três momentos.....	5
Figura 2.3 - Perturbação dispersiva ao longo do tempo e espaço – neste exemplo a amplitude máxima diminui enquanto os picos e vales se afastam. ....	6
Figura 2.4 – Placa infinita simplesmente apoiada. ....	11
Figura 2.5 –três primeiros modos de onda de uma placa simplesmente apoiada. ....	12
Figura 2.6 – Exemplo de propagação para cada um dos modos da placa.....	13
Figura 2.7 – Diagrama de forças e deslocamentos a esquerda, $fL$ e $qL$ , e a direita, $fR$ e $qR$ de célula de comprimento $l$ em uma malha de elementos finitos unidimensional .....	14
Figura 4.1 –Barra engastada livre de comprimento $L = Nl$ , com forçamento $F$ e um elemento de tamanho $l$ . ....	22
Figura 4.2 - Representação de força e deslocamento de um elemento de barra de comprimento $l$ . ....	22
Figura 4.3 – Viga bi-engastada de comprimento $L = Nl$ , com forçamento $F$ a dois terço do comprimento total e um elemento de tamanho $l$ .....	23
Figura 4.4 – Elemento de viga Euler-Bernoulli com dois nós e dois graus de liberdade por nó. ....	24
Figura 4.5 – Placa infinita simplesmente apoiada de largura $w$ e elementos de dimensões $l_x$ e $l_y$ . ....	25
Figura 4.6 – Elemento finito retangular de placa com quatro nós e três graus de liberdade por nó.....	26
Figura 4.7 – a) tira com oito elementos organizada automaticamente conforme convenção de (PETYT, 2011). b) tira com oito elementos otimizada para uso do WFE...	27
Figura 5.1 – Parte real e parte imaginária dos números de onda de uma barra esbelta, sob movimento longitudinal, encontrado com WFE e solução analítica. ....	28
Figura 5.2 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico .....	29
Figura 5.3 – Parte real da relação de dispersão para viga com propagação flexural obtida via WFE e a solução analítica. Onda puramente propagativa. ....	30
Figura 5.4 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas propagantes.....	30
Figura 5.5 - Parte imaginária da relação de dispersão para viga com propagação flexural obtida via WFE e a solução analítica. Onda puramente evanescente.....	31
Figura 5.6 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas evanescentes. ....	31
Figura 5.7 – Curvas de dispersão dos resultados analíticos para os três primeiros modos de propagação no sentido positivo de $x$ . ....	33
Figura 5.8 – Curvas de dispersão dos resultados por WFE para os três primeiros modos de propagação no sentido positivo de $x$ . ....	33
Figura 5.9 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas propagantes.....	34
Figura 5.10 – Erro absoluto entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas propagantes.....	34

Figura 5.11 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas evanescentes. ....	35
---	----

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

		Unidades
$\tilde{A}; \tilde{B}$	Amplitude complexa	[m]
$E$	Módulo de elasticidade	[Pa]
$G$	Módulo de cisalhamento	[Pa]
$I$	Segundo momento de área	[m <sup>4</sup> ]
$I_p$	Momento polar de inércia	[m <sup>4</sup> ]
$J$	Constante de torção	[m <sup>4</sup> ]
$S$	Área de seção transversal	[m <sup>2</sup> ]
$c_f$	Velocidade de fase	[m/s]
$c_g$	Velocidade de grupo	[m/s]
$c_l$	Velocidade de fase longitudinal	[m/s]
$c_l''$	Velocidade de fase quase-longitudinal	[m/s]
$c_s$	Velocidade de fase transversal	[m/s]
$c_b$	Velocidade de fase flexural	[m/s]
$j$	unidade imaginária, $\sqrt{-1}$	Adimensional
$k$	Número de onda	[rad/m]
$l$	Comprimento do elemento finito	[m]

### Símbolos Gregos

$\alpha$	Constante de atenuação	[m <sup>-1</sup> ]
$\beta$	Constante de fase	[m <sup>-1</sup> ]
$\varepsilon$	Deformação	[m]
$\eta$	Deslocamento	[m]
$\theta$	Variação angular	rad
$\lambda$	Autovalor	Adimensional
$\nu$	Constante de Poisson	Adimensional
$\rho$	Massa específica	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Tensão normal	[Pa]
$\tau$	Tensão cisalhante	[Pa]
$\omega$	Frequência angular	[rad/s]

### Matrizes

$C$	Matriz de amortecimento
$D$	Matriz de rigidez dinâmica
$K$	Matriz de rigidez
$M$	Matriz de massa
$T$	Matriz de transferência
$f$	Vetor forçamento
$q$	Vetor deslocamento
$u, v$	Vetores arbitrários
$\{ \}^H$	Conjugado transposto

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Escopo

A análise vibratória é parte essencial no estudo ou projeto de um sistema mecânico. Qualquer sistema possui algum tipo de mecanismo de rigidez e inércia interna que, quando sujeito a alguma perturbação, responde de maneira oscilatória, a qual pode levar ao desgaste excessivo do sistema ou mesmo a falhas catastróficas.

Existe um interesse crescente no estudo de técnicas de análise relevantes a sistemas periódicos (BRILLOUIN, 1946) como materiais compósitos (NEMAT-NASSER, 1972)(SUN; ACHENBACH; HERRMANN, 1968), estruturas de aeronaves (ABRAHAMSON, 1973), pernas de plataformas petrolíferas (ASIRI; AL-ZAHRANI, 2014), trilhos de trens (GUPTA et al., 2006; RYUE et al., 2008, 2009), algumas fundações para prédios (BAO; SHI; XIANG, 2012) e várias outras.

Para tanto, tratamos os sistemas estudados como guias de ondas. Estes sistemas propagam a energia mecânica numa direção preferencial que depende da geometria do sistema. Partiremos de uma análise matemática, detalhando sua derivação e explicitando quaisquer aproximações que podem ser feitas, assim como suas limitações. Foi analisado numericamente uma fatia deste sistema pelo método de Elementos Finitos para encontrar seus números de onda e respectivos modos de propagação de onda, para posterior comparação com resultados analíticos.

## 1.2. Objetivos gerais e específicos

Este trabalho tem por objetivo geral a investigação do método de Ondas e Elementos Finitos (Wave and Finite Element - WFE) e suas aplicações em guias de ondas estruturais. Para tanto, serão investigados métodos de propagação de onda em guias de ondas simples, como barras, vigas e placas finas, com solução analítica disponível, como método de análise dinâmica complementar à análise modal. Investiga-se, também, os conceitos ondas propagativas e evanescentes, curvas de dispersão e modos de propagação de onda, assim como velocidade de fase e velocidade de grupo. Posteriormente, esses conceitos serão utilizados para aplicação do WFE, inicialmente nos guias de ondas simples, com solução analítica, investigados na primeira parte do trabalho, e em seguida, em guias de ondas com secção transversal arbitrariamente complexa, modelada via método de Elementos Finitos.

## 1.3. Organização do trabalho

O presente trabalho desenvolve-se em seis capítulos. O Capítulo 1 apresenta uma introdução, onde é feita uma breve apresentação dos objetivos e escopo do trabalho. No capítulo 2, uma revisão teórica



dos métodos analíticos de análise de propagação de onda para estruturas simples é apresentada, assim como os conceitos de velocidade de fase e de grupo. No capítulo 3 a metodologia utilizada em análises WFE é apresentada, assim como o conceito de matriz de transferência. No capítulo 4 o método WFE é aplicado em três exemplos conhecidos com resultados analíticos conhecidos. No capítulo 5, os resultados obtidos são discutidos e, finalmente, no capítulo 6 algumas conclusões são apresentadas, assim como perspectivas futuras do trabalho.

## 2. Revisão Teórica

*Nesta seção algumas propriedades e definições físicas são revisadas, assim como algumas simplificações, usadas ao longo deste trabalho. Não existe uma simbologia aceita unanimemente por toda a comunidade de modo que, para que haja coerência nos resultados encontrados, são necessárias estas determinações.*

### 2.1. Propagação de Ondas e Guias de onda

A vibração de sistemas mecânicos pode ser um fenômeno extremamente complexo de ser descrito, de maneira que a análise desses sistemas requer que seja realizada uma modelagem simplificadora. Tal modelagem, no entanto, pode tomar várias formas que apesar de não serem exatas, fazem aproximações que idealmente permitem a análise do comportamento de corpos e previsão de como o corpo se comportará em diferentes condições de contorno. Dependendo das condições de contorno, diferentes métodos podem simplificar enormemente o entendimento e manipulação deste sistema. Um método possível é modelo de onda.

Ondas são mecanismos de transferência de energia através de matéria ou espaço por meio de oscilações, sem que haja transferência de massa através do meio. Estruturas que facilitam este fenômeno são chamadas de “Guias de Onda”. Estas possuem construções, tanto internas quanto externas, homogêneas e periódicas de maneira a apontar as ondas numa direção preferencial.

Como é de se esperar, a homogeneidade destes materiais faz com que a modelagem matemática destes problemas seja bastante simplificada, com a vantagem de que sua especificidade também facilite a escolha pelo engenheiro de quando aplicar os métodos descritos neste trabalho.

### 2.2. Características das ondas

Antes de podermos falar sobre o WFE, é importante entender as propriedades das ondas e seus impactos nas respostas que essas causarão.

Uma onda pode ser caracterizada matematicamente por um campo de deslocamento do tipo

$$\varphi(x, t) = \tilde{A}e^{j(\omega t - kx)}, \quad (1)$$

onde  $\tilde{A}$  é a amplitude complexa da onda. Em sistemas de vibração livre, define-se a amplitude máxima do deslocamento, assim como define a defasagem da oscilação, onde  $\omega$  é a frequência temporal, i.e., quantidade escalar que define o tempo de uma oscilação, descrevendo mudança de fase no tempo e  $k$  é o número de onda, que descreve o comportamento da onda no espaço (FAHY;

GARDONIO, 2007).

Enquanto a frequência temporal é um valor real, o número de onda  $k$  pode tomar qualquer valor complexo, da forma  $k = -\alpha j + \beta$ , fazendo com que a onda se torne uma *onda atenuante*, i.e., sua amplitude decresce ao longo de sua propagação.

Pode-se ver melhor o efeito ao se substituir na equação de onda propagante

$$\varphi(x, t) = \tilde{A}e^{j(\omega t - kx)} = \tilde{A}e^{j(\omega t + j\alpha x - \beta x)} = (\tilde{A}e^{j(\omega t - \beta x)})e^{-\alpha x}. \quad (2)$$

Neste caso  $\alpha$  é chamado de constante de atenuação e define o quanto a onda decresce ao longo do espaço, enquanto  $\beta$  é a constante de fase e descreve a mudança de fase da onda por unidade de espaço.

Quando os números de onda são puramente imaginários, estes indicam campos não propagantes também chamados de *ondas evanescentes*. Fisicamente elas se manifestam como um aumento de amplitude local que decai exponencialmente com a distância, e não podem, individualmente, transportar energia (FAHY; GARDONIO, 2007). Podemos visualizar o comportamento das diferentes ondas na Fig. 2.1.

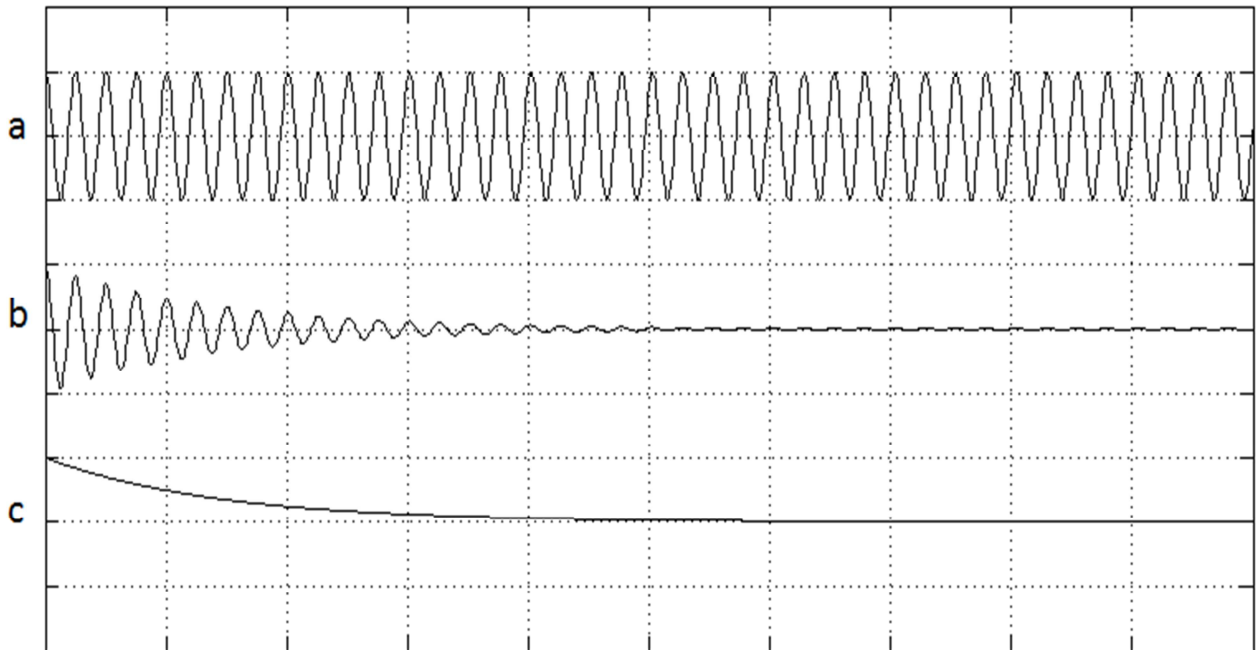


Figura 2.1 - Tipos de onda segundo a forma: (a) propagante, número de onda puramente real; (b) atenuante, número de onda complexo; e (c) evanescente, número de onda puramente imaginário.

A equação (1) assume movimento harmônico e é a forma mais simples de uma onda que age na forma conhecida de um deslocamento senoidal se propagando na direção positiva de  $x$ , de forma que uma onda se propagando na direção negativa poderia ser descrita por  $\varphi(t) = \tilde{B}e^{i(\omega t + kx)}$ . Adicionalmente, estas ondas descrevem um sistema linear onde vale a superposição, de forma que uma onda que se propaga em ambas as direções seria a soma de ambas estas equações.

$$\varphi(x, t) = \tilde{A}e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{B}e^{i(\omega t + kx)}. \quad (3)$$

De fato, a equação de movimento de qualquer onda, assim como qualquer movimento periódico, pode ser vista como a soma de infinitos termos de senos e cossenos ou de exponenciais numa série de Fourier

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \sin(nx) + \tilde{B}_n \cos(nx). \quad (4)$$

A partir das propriedades básicas, definimos duas propriedades secundárias: a velocidade de fase e a velocidade de grupo.

A *velocidade de fase* é uma relação entre frequência e número de onda que descreve a velocidade com que uma onda se move em relação a um referencial qualquer:

$$c_f = \frac{\omega}{k}. \quad (5)$$

No caso de números de onda puramente imaginários, a velocidade de fase também será imaginária, o que serve como demonstração adicional da imobilidade das ondas evanescentes.

Também é interessante notar como pode existir dependência entre a frequência e o número de onda. A forma desta conexão, denominada *relação de dispersão*, confere informações tanto a respeito da onda sendo estudada, quanto do meio por onde a onda se propaga. Quando esta relação é linear, tem-se ondas não dispersivas, ou seja, a onda se conserva ao longo de sua propagação. Caso contrário, a onda é dispersiva, fazendo com que ondas de frequências diferentes tenham velocidades diferentes.

As Figuras 2.2 e 2.3 abaixo demonstram o comportamento de duas perturbações, com amplitude e frequência inicialmente idênticas, porém a primeira é não dispersiva e a segunda é dispersiva.

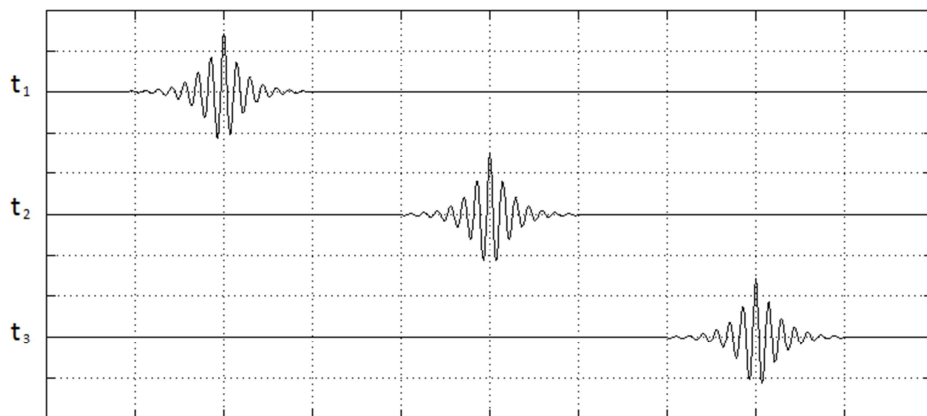


Figura 2.2 - Perturbação não dispersiva ao longo do tempo e espaço – a onda mantém a forma em todos os três momentos.

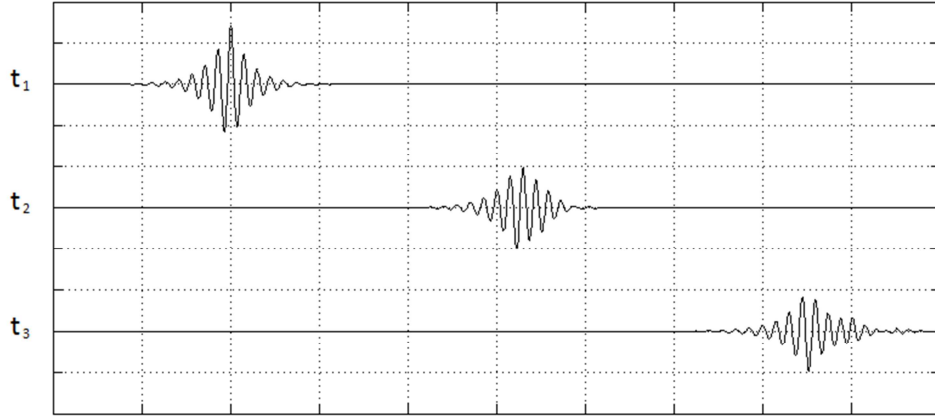


Figura 2.3 - Perturbação dispersiva ao longo do tempo e espaço – neste exemplo a amplitude máxima diminui enquanto os picos e vales se afastam.

O fenômeno da onda dispersiva é melhor entendido ao se verificar que a velocidade com que a energia está sendo transportada, chamada *velocidade de grupo*, é diferente da velocidade de fase de ondas dispersivas, fazendo com que a forma da onda mude (ACHENBACH, 1984; FAHY; GARDONIO, 2007). A velocidade de grupo é definida como:

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (6)$$

Para ondas não dispersivas, a velocidade de fase é igual a velocidade de grupo.

## 2.3. Tipos de ondas

Nesta seção, uma revisão de alguns tipos de ondas em guias de ondas unidimensionais mais relevantes é apresentada: longitudinais, quase-longitudinais, transversais e flexurais.

### 2.3.1. Ondas Longitudinais em sólidos

Ondas longitudinais são aquelas onde o deslocamento da partícula acontece na mesma direção em que a propagação da onda. Num sólido, quando um deslocamento relativo entre partículas vizinhas ocorre, o elemento sofre uma deformação  $\epsilon_{xx}$  da forma

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (7)$$

onde  $\xi$  é o deslocamento entre as partículas na direção  $x$ .

De acordo com a Lei de Hooke, a tensão  $\sigma_{xx}$  se relaciona à deformação através de uma constante (LANDAU; LIFSHITZ, 1986) tal que

$$\sigma_{xx} = B \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (8)$$

onde  $B$  é uma constante que relaciona o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) do material. Para um elemento cujo comprimento é muito maior que a largura e altura, utilizamos a aproximação de estado plano de deformação, de modo que  $B$  é definido de acordo com a seguinte equação:

$$B = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (9)$$

O balanço de forças devido à deformação é dado por

$$(\rho \delta x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x - \sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x, \quad (10)$$

que pode ser rearranjado numa equação da onda

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{B} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (11)$$

com velocidade de fase

$$c_l = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \quad (12)$$

que não é dependente da frequência e, portanto, não dispersiva.

### 2.3.2. Ondas quase-longitudinais em sólidos

As ondas longitudinais são um caso ideal usado como aproximação apenas para sólidos que se estendem em todas as direções e em grandes distâncias, uma vez que, nas outras aplicações, a contração de Poisson fará com que a tensão longitudinal cause tensões laterais que não podem ser desprezadas.

Em uma barra fina, por definição, a razão entre a tensão longitudinal e a deformação é  $E$ , de forma que pode ser demonstrado que a relação entre tensão lateral e longitudinal é da forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Assumindo uma resposta do tipo  $\eta(x, t) = \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k_l' x)}$  teremos que

$$k^2 \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k'_l x)} = \frac{\rho}{E} \omega^2 \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k'_l x)}. \quad (14)$$

Portanto teremos número de onda

$$k_{1,2} = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \pm k'_l \quad (15)$$

com velocidade de fase

$$c'_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (16)$$

que também não depende da frequência e portanto é não dispersiva.

### 2.3.3. Ondas Transversais (cisalhantes) em sólidos

Ondas transversais, em contrapartida às ondas longitudinais, são aquelas onde o deslocamento das partículas é perpendicular à propagação da onda. Num sólido, existirá uma resistência a esta deformação gerando uma tensão cisalhante. A razão entre esta tensão e a deformação é caracterizada pelo *Módulo de Cisalhamento* ( $G$ ):

$$G = \frac{\tau}{\gamma}. \quad (17)$$

O módulo de cisalhamento se relaciona ao módulo de elasticidade como se segue:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (18)$$

Durante a deformação, a tensão cisalhante cria uma aceleração vertical dada por  $\partial^2 \eta / \partial t^2$ , com  $\eta$  sendo o deslocamento na direção  $y$ , de modo que a equação de movimento é

$$\rho \delta x \delta y \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta x \delta y, \quad (19)$$

e a tensão pode ser descrita como

$$\tau_{xy} = G\gamma = G \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (21)$$

Portanto, a equação da onda é dada por

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (22)$$

De maneira semelhante ao que foi feito anteriormente, assumiremos uma resposta do tipo  $\eta(x, t) = \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k_s x)}$

$$k^2 \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k_s x)} = \frac{\rho}{G} \omega^2 \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k_s x)}. \quad (23)$$

Portanto tem-se números de onda dados por

$$k_{1,2} = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \pm k_s, \quad (24)$$

com velocidade de onda dada por

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (25)$$

Vale notar que a velocidade de ondas transversais é menor que as quase-longitudinais, ou seja

$$\frac{c_s}{c_l} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)} \frac{\rho}{E}} = \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)}}. \quad (26)$$

Como o mecanismo de funcionamento de torção é análogo ao de cisalhamento, porém para rotação, ondas torcionais também são ondas cisalhantes, com equação de onda

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{I_p}{GJ} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (27)$$

onde  $I_p$  é o momento polar de inércia por unidade de comprimento e  $J$  é a constante de torção do elemento. Os números de onda e velocidade da onda torcional são, respectivamente, dados por

$$k_{1,2} = \pm \omega \sqrt{\frac{I_p}{GJ}} = \pm k_t, \quad (28)$$

$$c_t = \sqrt{\frac{GJ}{I_p}}. \quad (29)$$



### 2.3.4. Ondas Flexurais em Vigas

Finalmente, existem as ondas flexurais, que não podem ser representadas por deformações apenas longitudinais ou transversais. Estas ondas são de suma importância para a vibroacústica, já que são as principais responsáveis pela troca de energia entre dois meios e pela geração de ruído. Isso ocorre pois ondas flexurais envolvem grandes deslocamentos nas direções normais à propagação causando perturbação em materiais adjacentes.

Utilizando a descrição para vigas de Euler-Bernoulli (FAHY; GARDONIO, 2007; PETYT, 2011), tem-se a equação da onda

$$EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = -\rho S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (30)$$

onde  $S$  é a área da seção transversal e  $I$  o segundo momento de área. Assumindo uma resposta do tipo  $\eta(x, t) = \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k_b x)}$ , obtem-se

$$k^4 \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k_b x)} = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k_b x)}, \quad (31)$$

o que significa que os números de onda deverão ser do tipo

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2}, \quad (32)$$

que permite que sejam encontrados quatro números de onda: dois puramente reais e dois puramente imaginários, ou seja,

$$k_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2} = \pm k_b, \quad (33)$$

$$k_{3,4} = \pm j \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI} \omega^2} = \pm j k_b.$$

Como a equação geral é uma combinação destes modos

$$\eta(x, t) = (\tilde{A} e^{-j k_b x} + \tilde{B} e^{j k_b x} + \tilde{C} e^{-k_b x} + \tilde{D} e^{k_b x}) e^{j \omega t} \quad (34)$$

com, respectivamente, as seguintes velocidades de fase e de grupo

$$c_{bf} = \frac{\omega}{k_i} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 EI}{\rho S}}, \quad (35)$$

$$c_{bg} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = 2k \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = 2 \sqrt[4]{\frac{\omega^2 EI}{\rho S}} = 2c_{bf}. \quad (36)$$

Nota-se duas propriedades muito importantes que diferenciam as ondas flexurais das outras estudadas. A primeira é o aparecimento de números de onda puramente imaginários e, portanto, o aparecimento de ondas evanescentes. A outra propriedade é que a velocidade de fase depende da frequência e portanto as ondas de flexão são ondas dispersivas.

## 2.4. Propagação de ondas em placas finas simplesmente apoiadas

Uma placa infinita na direção do eixo  $x$  com largura  $w$  e espessura  $t$  muito menor que  $w$ , simplesmente apoiada em  $y=0$  e  $y=w$ , Figura 2.4 – Placa infinita simplesmente apoiada., terá ondas propagando ao longo da direção do eixo  $x$  de maneira semelhante a uma viga, porém, com a equação constitutiva dada por

$$B = \frac{E}{(1 - \nu^2)}, \quad (37)$$

de modo que se considera a limitação que ocorre nas laterais.

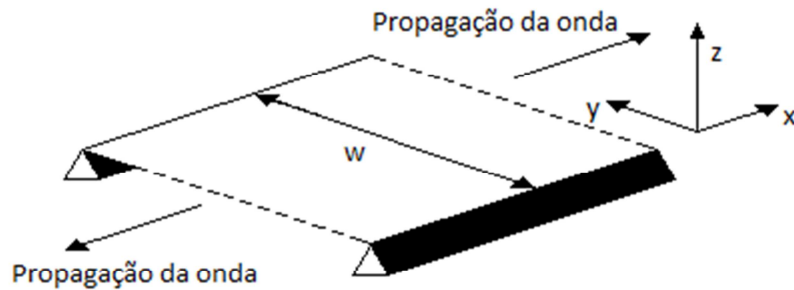


Figura 2.4 – Placa infinita simplesmente apoiada.

Além do mais, a equação da onda dessa estrutura também deve ser definida no eixo  $x$  e no eixo  $y$  de modo que

$$D \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \right) = \rho h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (38)$$

onde

$$D = BI = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (39)$$

é a rigidez flexural da placa. A resposta em  $\eta$  pode ser separada em termos de  $x$  e  $y$  devido às condições de contorno impostas. Essas condições de contorno também limitam as possíveis formas de onda que podem aparecer na direção  $y$ , fazendo com que esta componente possa ser descrita através da solução modal, o que leva a

$$\eta(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m(x) \sin\left(\frac{m\pi y}{w}\right), \quad (40)$$

onde  $\eta_m(x)$  é a amplitude complexa do  $m$ -ésimo componente da série acima e  $\sin(m\pi y/w)$  é o  $m$ -ésimo modo de onda. A Figura 2.5 mostra os três primeiros modos de onda de uma placa simplesmente apoiada.

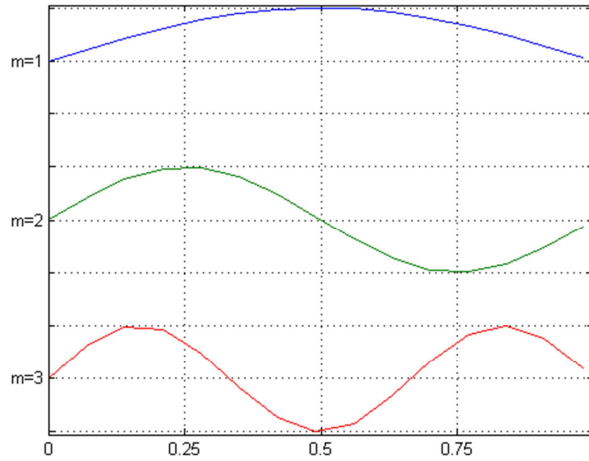


Figura 2.5 –três primeiros modos de onda de uma placa simplesmente apoiada.

Substituindo  $\eta(x, y)$  na Eq.(38), temos que

$$\frac{\partial^4 \eta_m}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^2 \eta_m}{\partial x^2} \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{w}\right)^4 = \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (41)$$

Assumindo soluções do tipo  $\eta_m(x, t) = \tilde{\eta} e^{-j(\omega t - k_{x,m} x)}$ , temos que

$$k_{x,m}^4 + 2k_{x,m}^2 \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{w}\right)^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2, \quad (42)$$

que pode ser escrito como

$$\left(k_{x,m}^2 + \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2\right)^2 = k_{bp}^4, \quad (43)$$

onde  $k_{bp} = \sqrt[4]{\left(\frac{\rho h}{D}\right)} \sqrt{\omega}$  é o número de onda livre da placa. Isto significa que para este tipo de estrutura existem quatro soluções de número de onda para cada modo de onda, que podem ser classificadas em dois tipos fundamentalmente diferentes

$$k_{x1,m} = \pm \sqrt{k_{bp}^2 - \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2}, \quad (44)$$

$$k_{x2,m} = \pm \sqrt{-k_{bp}^2 - \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2}, \quad (45)$$

As ondas só serão propagantes em  $k_{x1,m}$  quando  $k_{bp} > \frac{m\pi}{w}$ , e são evanescentes para  $k_{x2,m}$ . A frequência em que  $k_b = \frac{m\pi}{w}$  é chamada de m-ésima frequência de corte.

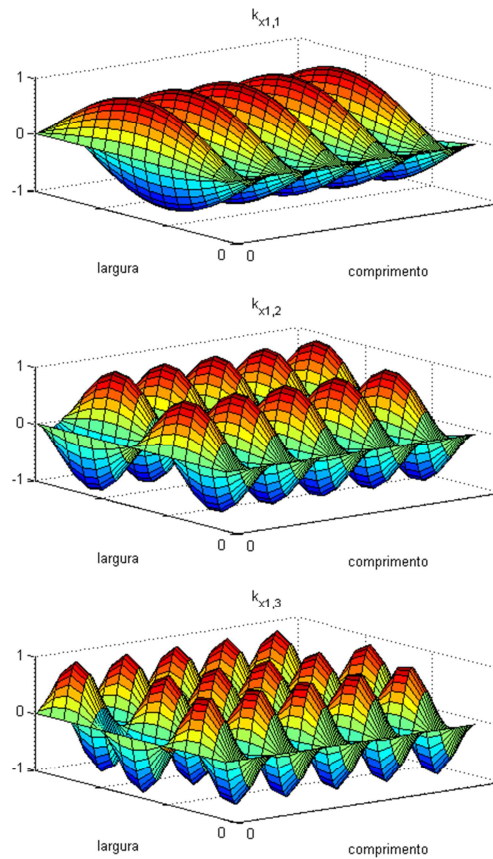


Figura 2.6 – Exemplo de propagação para cada um dos modos da placa.

## 2.5. Método de Elementos Finitos

Estruturas reais são formadas por um número extremamente grande de moléculas de maneira que estudar este sistema seria impossível devido ao número de graus de liberdade e forças intermoleculares agindo, que seriam, essencialmente, infinitos. Por isso em geral é utilizada a hipótese de mecânica do contínuo, em que não se trata o meio como um conjunto de moléculas, mas como um continuum matemático.

O método de elementos finitos (PETYT, 2011) é um método numérico que consiste em dividir o volume do sistema sendo estudado em fatias contínuas grandes o suficiente para que o número de cálculos possa ser feito por um computador, mas pequenos o bastante para que o sistema numérico fique próximo o suficiente do sistema real. É possível que, se a definição das dimensões e propriedades dos elementos for feita de maneira apropriada, a aproximação seja boa o suficiente para que os erros teóricos fiquem menores que os de instrumentos de medição.

## 2.6. Matriz de Rigidez Dinâmica

Uma ferramenta extremamente importante para o método de elementos finitos em dinâmica de estruturas é a matriz de rigidez dinâmica. Ela consiste na modelagem em matrizes das propriedades de rigidez, amortecimento e inércia de um elemento aplicadas em seus nós, de maneira a manter as propriedades reais do elemento sendo estudado.

Considerando uma estrutura que pode ou não possuir infinitos elementos tais que cada um dos elementos, numerados  $n$ , possui a relação de deslocamentos e forças dadas pela Fig. 2.4.

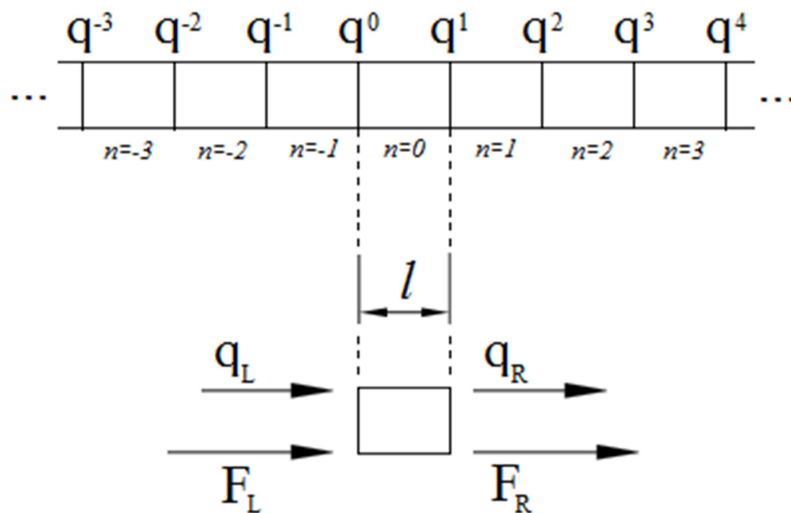


Figura 2.7 – Diagrama de forças e deslocamentos a esquerda,  $f_L$  e  $q_L$ , e a direita,  $f_R$  e  $q_R$  de célula de comprimento  $l$  em uma malha de elementos finitos unidimensional

Uma aproximação por elementos finitos, de maneira geral, assumindo movimento harmônico, leva a seguinte equação do movimento

$$(\mathbf{K} - j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (46)$$

onde  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  são respectivamente as matrizes de rigidez, massa e dissipação,  $\mathbf{F}$  o vetor de carregamento e  $\mathbf{q}$  o vetor de deslocamento. Definindo  $(\mathbf{K} - j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})$  como a matriz de rigidez dinâmica  $\tilde{\mathbf{D}}$ , e decompondo a equação em termos dos graus de liberdade da fronteira esquerda (L) e direita (R), e interior (I) tem-se que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{II} & \tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{LI} & \tilde{\mathbf{D}}_{LL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RI} & \tilde{\mathbf{D}}_{RL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix}. \quad (47)$$

A solução da primeira linha leva a

$$\mathbf{q}_I = \tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}(\tilde{\mathbf{D}}_{IL}\mathbf{q}_L + \tilde{\mathbf{D}}_{IR}\mathbf{q}_R). \quad (48)$$

Pode-se então eliminar os graus de liberdade interior escrevendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LL} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RL} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix}, \quad (49)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Como as matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  são simétricas, a matriz de rigidez dinâmica elementar também o será, ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{LL}^T &= \mathbf{D}_{LL}, & \mathbf{D}_{LR}^T &= \mathbf{D}_{RL}, \\ \mathbf{D}_{RL}^T &= \mathbf{D}_{LR}, & \mathbf{D}_{RR}^T &= \mathbf{D}_{RR}. \end{aligned} \quad (51)$$

A definição das relações entre os deslocamentos e forças atuantes nos nós de cada elemento finito permite a criação de uma Matriz Global de Rigidez Dinâmica, que descreve o comportamento do corpo como um todo e nos traz de volta à análise desejada.

A Matriz Global de Rigidez Dinâmica é dada pela montagem de todos os elementos individuais, de forma que para uma estrutura unidimensional formada por  $N$  elementos idênticos, teremos a seguinte relação entre deslocamentos e forças (MACE, 2003)

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LR} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LR} & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{D}_{RL} & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LR} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{q}_1 \\
\mathbf{q}_2 \\
\mathbf{q}_3 \\
\vdots \\
\mathbf{q}_N \\
\mathbf{q}_{N+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_1 \\
\mathbf{f}_2 \\
\mathbf{f}_3 \\
\vdots \\
\mathbf{f}_N \\
\mathbf{f}_{N+1}
\end{bmatrix}. \quad (52)$$

No entanto, que para uma estrutura periódica a Matriz Global de Rigidez Dinâmica depende de um número muito pequeno de variáveis. Por exemplo, para o caso acima descrito, ela só possuirá três variáveis que já estão descritas para apenas um elemento e mesmo para sistemas que possuem vários graus de liberdade, a matriz será do tipo banda e formada por termos encontrados em apenas um elemento.

Portanto, a abordagem de propagação de ondas combinada à hipótese de condição periódica permite a modelagem de toda a estrutura a partir de apenas uma célula periódica, reduzindo consideravelmente o custo computacional.

### 3. Análise por WFE

*Apresentaremos a seguir a modelagem da matriz de transferência que deve ser realizada, a partir da matriz de rigidez dinâmica, para a aplicação do método WFE, assim como critérios de garantia necessários devido ao uso processamento automático.*

#### 3.1. Matriz de Transferência

Assumindo-se que existe uma matriz  $T$  que relaciona as forças e deslocamentos entre duas células adjacentes ao longo da propagação,  $n$  e  $n + 1$ , tem-se que (MACE, 2003)

$$T \begin{bmatrix} q_L^n \\ f_L^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_R^n \\ -f_R^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_L^{n+1} \\ f_L^{n+1} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Usando estes valores na primeira linha da matriz de rigidez dinâmica, eq. (50), tem-se que

$$q_l^{n+1} = D_{LR}^{-1}(f_l^n - D_{LL}q_L^n). \quad (54)$$

Aplicando esta relação na segunda linha da matriz de rigidez dinâmica

$$f_l^{n+1} = -D_{RR}D_{LR}^{-1}f_l^n - (D_{RL} - D_{RR}D_{LR}^{-1}D_{LL})q_L^n. \quad (55)$$

A matriz de transferência  $T$  será, portanto,

$$T = \begin{bmatrix} -D_{LR}^{-1}D_{LL} & D_{LR}^{-1} \\ -D_{RL} + D_{RR}D_{LR}^{-1}D_{LL} & -D_{RR}D_{LR}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

e, nota-se, depende apenas das propriedades da célula.

Alternativamente, pode-se notar que a posição de um nó em uma célula depende do tamanho das células e da posição do outro nó de forma que

$$x_L^{n+1} = x_R^n = x_L^n + l. \quad (57)$$

Mas, a onda se propaga de acordo com a eq. (1). Aplicando a eq. (57), encontra-se

$$q_L^n = \tilde{A}e^{j(\omega t - kx_L^n)}, \quad (58)$$

$$q_L^{n+1} = \tilde{A}e^{j(\omega t - k(x_L^n + l))} = \tilde{A}e^{j(\omega t - kx_L^n)}e^{-jkl}, \quad (59)$$

ou seja



$$\mathbf{q}_L^{n+1} = \mathbf{q}_L^n e^{-jkl}. \quad (60)$$

Definindo o fator  $\lambda = e^{-jkl}$ , e sabendo que o mesmo vale para a força sendo aplicada, tem-se

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^n \\ \mathbf{f}_L^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^{n+1} \\ \mathbf{f}_L^{n+1} \end{bmatrix}. \quad (61)$$

e portanto

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix}, \quad (62)$$

que é um problema de autovalores e autovetores do tipo

$$[\mathbf{T} - I\lambda] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = 0. \quad (63)$$

Expandindo a solução demonstra-se uma importante propriedade. A partir da primeira linha de  $\mathbf{T}$  tem-se que

$$\mathbf{f}_L = (\mathbf{D}_{LL} + \lambda \mathbf{D}_{RL}) \mathbf{q}_L. \quad (64)$$

Substituindo na segunda linha da eq. (62),

$$(-\mathbf{D}_{RL} + \mathbf{D}_{RR} \mathbf{D}_{LR}^{-1} \mathbf{D}_{LL}) \mathbf{q}_L - \mathbf{D}_{RR} \mathbf{D}_{LR}^{-1} (\mathbf{D}_{LL} + \lambda \mathbf{D}_{RL}) \mathbf{q}_L = \lambda (\mathbf{D}_{LL} + \lambda \mathbf{D}_{RL}) \mathbf{q}_L. \quad (65)$$

que após simplificações, se torna

$$\left( \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda \mathbf{D}_{LR} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{D}_{RL} \right) \mathbf{q}_L = \mathbf{0}. \quad (66)$$

Portanto os autovalores serão a raiz da determinante

$$\left| \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda \mathbf{D}_{LR} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{D}_{RL} \right| = 0. \quad (67)$$

Tomando a transposta, encontra-se

$$\left| \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda \mathbf{D}_{RL} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{D}_{LR} \right| = 0 \quad (68)$$

ou seja, se  $\lambda$  for um autovalor,  $1/\lambda$  também será (MACE, 2003). Isto demonstra que a propagação da onda ocorre de maneira simétrica para ambas as direções.

### 3.2. Energia e potência do sistema

A onda, conforme já dito, é um mecanismo de transferência de energia através de matéria ou espaço por meio de oscilações. Portanto, é de suma importância que as energias presentes no sistema e o fluxo de dessa energia através desse sistema sejam bem entendidos.

#### 3.2.1. Energias cinética e potencial

A energia cinética de uma massa  $m$  é dada por

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 \quad (69)$$

O valor médio de uma grandeza  $H$  que varia de maneira harmônica é dada pela raiz do valor quadrático médio (rms)

$$\bar{H} = H_{rms} = \frac{h}{\sqrt{2}}. \quad (70)$$

Aplicando esse princípio à velocidade e reescrevendo a eq. (69) em notação complexa, a energia cinética média é dada por

$$\bar{E}_c = \frac{1}{2} m \frac{1}{2} \text{Re}\{(i\omega q)^H (i\omega q)\} = -\frac{m\omega^2}{4} \text{Re}\{q^H q\}. \quad (71)$$

A energia potencial devido a uma rigidez  $k$  é dada por

$$E_p = \frac{kq^2}{2}. \quad (72)$$

Reescrevendo em notação complexa, a energia média é dada por

$$\bar{E}_p = \frac{1}{2} k \frac{1}{2} \text{Re}\{q^H q\}. \quad (73)$$

Calculando essas grandezas para um elemento qualquer  $n$  que está sendo excitado por uma onda com modo de onda  $\phi$ , temos que

$$\bar{E}_c^n = \frac{1}{4} \text{Re}\{(i\omega \phi)^H \mathbf{M}(i\omega \phi)\}, \quad (74)$$

$$\bar{E}_p^n = \frac{1}{4} \text{Re}\{\phi^H \mathbf{K} \phi\}, \quad (75)$$

e energia total

$$\bar{E}_t^n = \bar{E}_c^n + \bar{E}_p^n. \quad (76)$$

Para um corpo que foi dividido em  $n$  elementos de igual comprimento  $l$  podemos definir a energia total por unidade de comprimento

$$\underline{\bar{E}}_t = \frac{\bar{E}_t^n}{l}. \quad (77)$$

### 3.2.2. Potência

A potência devido a uma força  $f$  é dada por

$$P = fv = f \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (78)$$

De maneira similar ao que foi feito para a energia, definimos a potência média como

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}\{f^H i\omega \eta\}. \quad (79)$$

Adicionalmente, podemos calcular a potência que está sendo transmitida através de um elemento  $n$  analisando suas bordas direita e esquerda

$$\bar{P}^n = \frac{1}{2} \text{Re}\{f_L^H i\omega q_L\} = -\frac{1}{2} \text{Re}\{f_R^H i\omega q_R\}. \quad (80)$$

Como a potência é o produto vetorial de duas grandezas com direcionalidade, esta também possuirá uma direção, a partir do qual pode-se inferir a direção da propagação da onda. A potência é constante e positiva na direção da propagação da onda para ondas propagantes. Esta propriedade é importante quando se analisa um objeto que permite propagação simétrica em ambas as direções, como serão os casos em estudo neste trabalho.

Aplicando a definição da Eq. (77), podemos fazer uma analogia e encontrar a velocidade em que a energia está se propagando.

$$\bar{P} = \underline{\bar{E}}_t c_g \quad (81)$$

$$c_g = \frac{\bar{P}}{\underline{\bar{E}}_t} \quad (82)$$

Como foi visto em 2.2, a velocidade de propagação da energia através do guia de onda é chamada de velocidade de grupo e é definida para cada modo de onda  $\phi$

### 3.3. Critérios de garantia (WAC e MAC)

Como pode ser visto na Eq. (46), o valor da matriz de rigidez dinâmica  $\mathbf{D}$  dependerá da frequência, de forma que para encontrar os autovalores e autovetores da matriz de transferência  $\mathbf{T}$  e definir o comportamento de um corpo em um intervalo de frequências, é necessário que o cálculo seja feito em passos discretos de frequência.

A utilização de computadores para o cálculo desses valores em grandes volumes traz consigo o revés de que a ordenação dos autovalores e autovetores em suas respectivas matrizes também é feita automaticamente, podendo fazer com que seus valores se embaralhem para diferentes frequências. Para que o engenheiro não tenha que conferir cada valor, foram desenvolvidos *critérios de garantia*, que verificam automaticamente a existência de correlação entre valores encontrados. Neste trabalho foram utilizados dois, o *critério de garantia de onda* (wave assurance criterion – WAC)(WAKI, 2007) e o *critério de garantia modal* (modal assurance criterion - MAC)(ALLEMANG, 2003).

O WAC tem como princípio a ideia de que as características de onda, e da mesma maneira seus autovetores, serão similares entre frequências próximas de tal forma que, definindo WAC como

$$WAC(\omega_n, \omega_{n-1}) = \frac{(\mathbf{v}_{\omega_n}^H \mathbf{v}_{\omega_{n-1}})^2}{(\mathbf{v}_{\omega_n}^H \mathbf{v}_{\omega_n})(\mathbf{v}_{\omega_{n-1}}^H \mathbf{v}_{\omega_{n-1}})} \quad (83)$$

onde  $\omega_n$  e  $\omega_{n-1}$  são as frequências no  $n$ -ésimo e  $(n - 1)$ -ésimo passos discretos de frequência e  $\mathbf{v}_{\omega_n}$  é o autovetor associado ao  $n$ -ésimo passo, tem-se que quanto mais próximo WAC for da unidade, maior a correlação entre os vetores dos diferentes passos.

O MAC funciona de maneira semelhante, porém, ele é utilizado para comparar dois vetores e verificar a compatibilidade de duas formas modais e é usado geralmente para alinhar resultados experimentais a resultados teóricos. É geralmente definido como

$$MAC(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{v}^H \mathbf{u})^2}{(\mathbf{v}^H \mathbf{v})(\mathbf{u}^H \mathbf{u})} \quad (84)$$

onde  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  são os vetores cuja correlação estão sendo testada. Neste trabalho o WAC é utilizado para a comparação entre a propagação analítica e a numérica. A partir das Eqs. (15), (24), (33) e (43), verifica-se que os valores de números de onda possuem mesmos módulos, de modo que o quadrado no numerador faria com que os valores se igualassem. Por esse motivo, a definição da direção da propagação de onda deve ser determinada através do sinal da potência.

## 4. Exemplos de Aplicação

*Nesta seção aplicaremos a metodologia proposta no capítulo anterior a modelos simples e que possuem resultados analíticos bem conhecidos (FAHY; GARDONIO, 2007; PETYT, 2011), para verificarmos a validade do modelo WFE.*

### 4.1. Barra esbelta

Assumindo uma viga esbelta de comprimento  $L$  e que permite apenas movimento longitudinal com geometria conforme a Fig. 4.1.

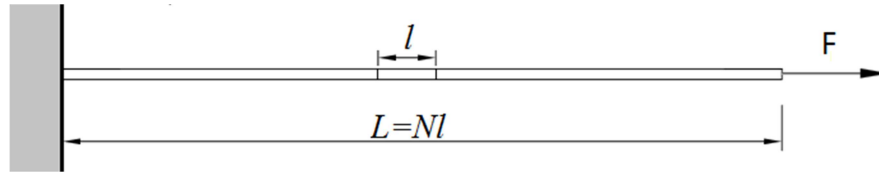


Figura 4.1 –Barra engastada livre de comprimento  $L = Nl$ , com forçamento  $F$  e um elemento de tamanho  $l$ .

A barra é formada por  $N$  elementos, sendo cada um com dois nós e um grau de liberdade por nó, conforme a Fig. 4.2.

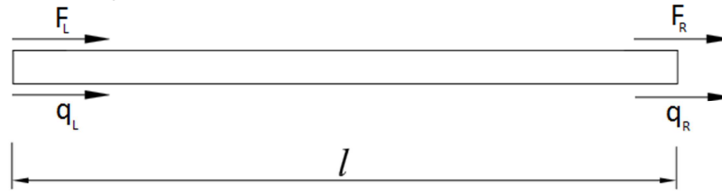


Figura 4.2 - Representação de força e deslocamento de um elemento de barra de comprimento  $l$ .

As matrizes de rigidez e massa podem ser encontradas na literatura (PETYT, 2011), e são, respectivamente, da forma

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\rho$  é a massa específica e  $S$  a área da seção transversal. Assumimos também uma matriz de amortecimento proporcional  $\mathbf{C} = \gamma \mathbf{K}$ . Logo a matriz de rigidez dinâmica será  $(\mathbf{K}(1 + j\gamma) - \omega^2 \mathbf{M})$ . Para adimensionalizar as equações, o deslocamento será dado em unidades de  $l$  e forças em unidades de  $\tilde{E}S$  onde  $\tilde{E} = (1 + j\gamma)E$ . Isto nos dá, respectivamente, as seguintes matrizes de rigidez dinâmica e transferência:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\rho l^2 \omega^2}{3\tilde{E}} & -1 - \frac{\rho l^2 \omega^2}{6\tilde{E}} \\ -1 - \frac{\rho l^2 \omega^2}{6\tilde{E}} & 1 - \frac{\rho l^2 \omega^2}{3\tilde{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{(kl)^2}{3} & -1 - \frac{(kl)^2}{6} \\ -1 - \frac{(kl)^2}{6} & 1 - \frac{(kl)^2}{3} \end{bmatrix}, \quad (87)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{1 + \frac{(kl)^2}{6}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{(kl)^2}{3} & -1 \\ (kl)^2 - \frac{(kl)^4}{12} & 1 - \frac{(kl)^2}{3} \end{bmatrix}, \quad (88)$$

onde  $k = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\tilde{E}}}$  é o número de onda com amortecimento para uma onda longitudinal. O amortecimento possui a função de dissipação de energia fazendo com que a onda se torne atenuante.

Os autovalores da Eq. (88) são dados por

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{1 + \frac{(kl)^2}{6}} \left( 1 - \frac{(kl)^2}{3} \pm jkl \sqrt{1 - \frac{(kl)^2}{12}} \right) = 1 \pm jkl - \frac{(kl)^2}{2} + O((kl)^3) \quad (89)$$

Para valores pequenos de  $kl$ , os autovalores são iguais a  $\exp(\pm jkl)$ , com erro de  $O((kl)^3)$ . Além disso, se  $(kl)^2 < 12$  e não houver amortecimento,  $|\lambda^+| = |\lambda^-| = 1$ .

## 4.2. Viga Euler-Bernoulli

Para verificação da validade do método WFE para ondas flexurais, verificaremos um corpo esbelto sendo forçado verticalmente, conforme a Fig. 4.3.

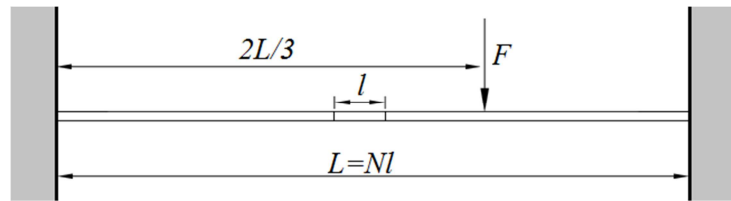


Figura 4.3 – Viga bi-engastada de comprimento  $L = Nl$ , com forçamento  $F$  a dois terço do comprimento total e um elemento de tamanho  $l$

Uma barra deve ser representada como uma viga se definirmos que este não possua apenas propriedades ao longo da direção  $x$ , mas também resistência a flexão de maneira que seu elemento finito apresente dois graus de liberdade por nó, e dois nós, conforme Fig. 4.4.

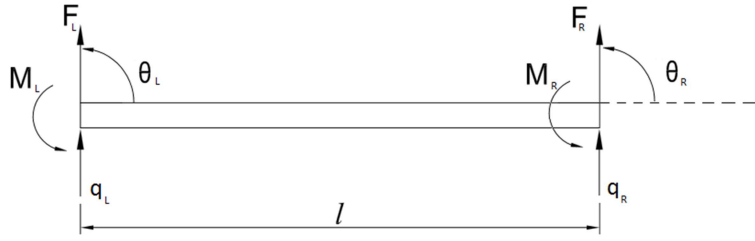


Figura 4.4 – Elemento de viga Euler-Bernoulli com dois nós e dois graus de liberdade por nó.

Para uma viga esbelta, vale a aproximação de Euler-Bernoulli, que são dadas por (PETYT, 2011)

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (90)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (91)$$

onde  $I$  é o segundo momento de área. Novamente assumimos uma matriz de amortecimento proporcional  $\mathbf{C} = \gamma \mathbf{K}$  e teremos matriz de rigidez dinâmica  $(\mathbf{K}(1 + j\gamma) - \omega^2 \mathbf{M})$ . Para adimensionalizar as equações, o deslocamento será dado em unidades de  $l$  e forças em unidades de  $\tilde{E}I/l^2$  e o momento em unidades de  $\tilde{E}I/l^2$ , com  $\tilde{E} = (1 + j\gamma)E$ . Isto leva às seguintes matrizes de rigidez dinâmica e transferência:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 12 - \frac{156(kl)^4}{420} & 6 - \frac{22(kl)^4}{420} & -12 - \frac{54(kl)^4}{420} & 6 + \frac{13(kl)^4}{420} \\ 6 - \frac{22(kl)^4}{420} & 4 - \frac{4(kl)^4}{420} & -6 - \frac{13(kl)^4}{420} & 2 + \frac{3(kl)^4}{420} \\ -12 - \frac{54(kl)^4}{420} & -6 - \frac{13(kl)^4}{420} & 12 - \frac{156(kl)^4}{420} & -6 + \frac{22(kl)^4}{420} \\ 6 + \frac{13(kl)^4}{420} & 2 + \frac{3(kl)^4}{420} & -6 + \frac{22(kl)^4}{420} & 4 - \frac{4(kl)^4}{420} \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{302400 + 720(kl)^4 + (kl)^8} \begin{bmatrix} 302400 + 13320(kl)^4 + 26(kl)^8 \\ 50400(kl)^4 + 120(kl)^8 \\ 302400(kl)^4 + 2820(kl)^8 + \frac{7(kl)^{12}}{2} \\ -151200(kl)^4 - 570(kl)^8 - \frac{(kl)^{12}}{4} \end{bmatrix}, \quad (93)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{aligned} & 302400 + 3240(kl)^4 + 2(kl)^8 & 50400 + 180(kl)^4 \\ & 302400 + 13320(kl)^4 + 10(kl)^8 & 151200 + 780(kl)^4 \\ & 151200(kl)^4 + 570(kl)^8 + \frac{(kl)^{12}}{4} & 302400 + 13320(kl)^4 + 26(kl)^8 \\ & -50400(kl)^4 - 78(kl)^8 - \frac{(kl)^{12}}{60} & -302400 - 3240(kl)^4 - 2(kl)^8 \\ & \left. \begin{aligned} & -151200 - 780(kl)^4 \\ & -302400 - 3240(kl)^4 \\ & -50400(kl)^4 - 120(kl)^8 \\ & 302400 + 13320(kl)^4 + 10(kl)^8 \end{aligned} \right\} , \end{aligned}
\end{aligned}$$

onde  $k = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$  é o número de onda com amortecimento para uma onda transversal. Os autovalores da Eq. (93) podem ser calculados, porém, suas expressões são muito grandes e apenas os primeiros termos da série são mostrados explicitamente:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= 1 \pm kl + \frac{(kl)^2}{2} \pm \frac{(kl)^3}{6} + \frac{(kl)^4}{24} + O((kl)^5) \\
\lambda_{3,4} &= 1 \pm jkl - \frac{(kl)^2}{2} \mp \frac{i(kl)^3}{6} + \frac{(kl)^4}{24} + O((kl)^5).
\end{aligned} \tag{94}$$

Para valores pequenos de  $kl$ , os autovalores serão iguais a  $\exp(\pm kl)$  e  $\exp(\pm jkl)$ , com erro de  $O((kl)^5)$ .

### 4.3. Placa fina e esbelta infinita

Verificamos agora uma placa infinita, simplesmente apoiada, similar à estudada na seção 2.4.

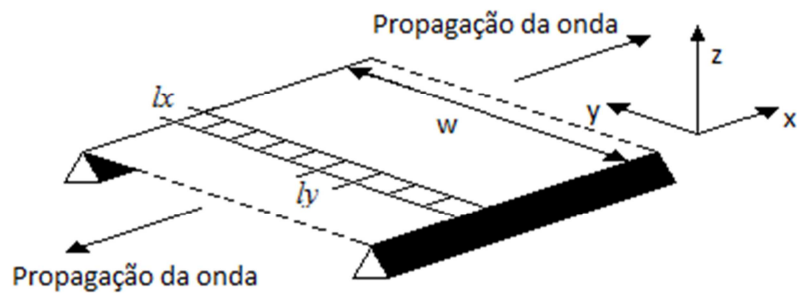


Figura 4.5 – Placa infinita simplesmente apoiada de largura  $w$  e elementos de dimensões  $l_x$  e  $l_y$ .



Para este caso utilizamos elementos finitos bidimensionais retangulares, com lados de comprimento  $l_x$  e  $l_y$ . Na realidade, o método de elementos finitos permite a utilização de elementos de tamanho irregular, porém o WFE requer a utilização de elementos que se repitam periodicamente na direção de propagação, o que requer no mínimo uma geometria regular. Essa restrição não se aplica à seção transversal analisada, que pode ser arbitrariamente irregular, dentro da precisão dada por seu modelo de elementos finitos.

Utilizando a convenção de (PETYT, 2011), temos que a caracterização do deslocamento da estrutura na direção normal à superfície da placa necessitará de três graus de liberdade, dados por:  $q$ , deslocamento nodal na direção normal à superfície e as rotações  $\theta_x = \frac{\partial q}{\partial y}$  e  $\theta_y = \frac{\partial q}{\partial x}$ .

Com um total de quatro nós por elemento, temos que cada elemento possuirá um total de doze graus de liberdade, resultando no vetor de deslocamento

$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad q_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad q_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad q_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}] \quad (95)$$

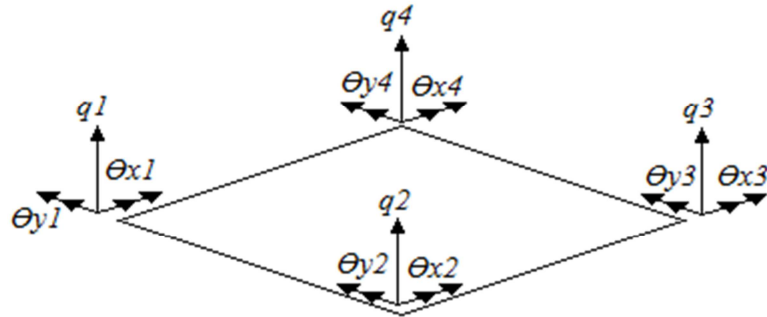


Figura 4.6 – Elemento finito retangular de placa com quatro nós e três graus de liberdade por nó.

As matrizes de rigidez e de massa são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{K} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)l_x l_y} \begin{bmatrix} k_{11} & & & sym \\ k_{21} & k_{22} & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \quad (96)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho t l_x l_y}{25200} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21}^T \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad (97)$$

onde os termos  $k_{11}$  a  $k_{44}$  assim como  $m_{11}$  a  $m_{22}$  estão explicitados no apêndice. A derivação completa das matrizes de massa e de rigidez podem ser verificada em (PETYT, 2011)

Para a utilização do método WFE, define-se uma tira perpendicular à propagação da onda formada

por vários elementos. A tira tem apenas um elemento na direção da propagação, uma vez que a hipótese de condição periódica permite a definição de toda a placa nesta direção a partir de apenas esse elemento.

O número de elementos na vertical dessa tira irá definir o número de modos de onda que poderão ser descritos dentro de uma precisão aceitável. Neste trabalho, foram utilizados oito elementos na direção  $y$ . A definição da matriz de rigidez dinâmica foi feita com o auxílio de um script dentro do programa MATLAB, com cuidado especial à configuração dos graus de liberdade. A matriz foi organizada de tal maneira que os graus de liberdade que só influenciam a esquerda ficassem no canto superior esquerdo ( $\mathbf{D}_{LL}$ ), os graus de liberdade que só influenciam a direita no canto inferior direito ( $\mathbf{D}_{RR}$ ) e graus de liberdade que influenciam ambos nos cantos inferior esquerdo e superior direito ( $\mathbf{D}_{LR}$ ) e ( $\mathbf{D}_{RL}$ ). Na utilização da matriz sem a organização correta existe a possibilidade de que essas submatrizes não sejam inversíveis.

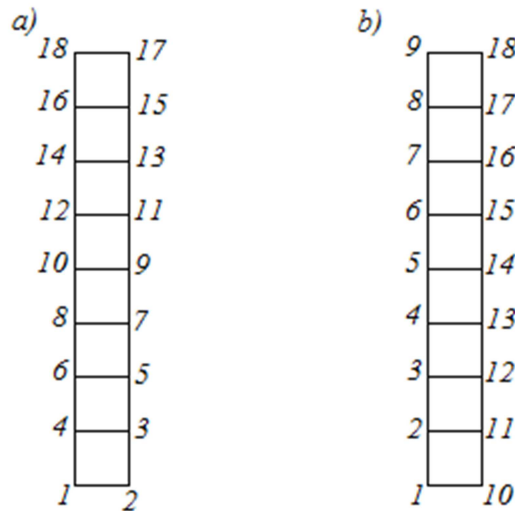


Figura 4.7 – a) tira com oito elementos organizada automaticamente conforme convenção de (PETYT, 2011). b) tira com oito elementos otimizada para uso do WFE.

A matriz formada pela montagem dos oito elementos teve dimensão 54x54, mas foi reduzida para uma matriz 46x46 devido às condições de contorno impostas.

## 5. Resultados e Discussões

*Neste capítulo os resultados obtidos pela metodologia do WFE, discutida no capítulo 4, é comparado às soluções analíticas, capítulo 3, de modo a verificar a aplicabilidade do método.*

### 5.1. Barra esbelta

As relações de dispersão são encontradas através das curvas de número de onda por frequência, i.e.  $k = k(\omega)$ . Comparando os resultados encontrados através do WFE, obtidos calculando os autovalores  $\lambda^\pm$  da matriz de transferência  $\mathbf{T}$  da eq. (88) e a identidade  $\log(\lambda^\pm) = \pm jkl$  usando o software MATLAB, ao resultado analítico da eq. (15), ambos com os valores adimensionais e sem amortecimento, obtém-se os resultados mostrados na Fig. 5.1.

A adimensionalização foi feita de maneira que se fosse obtida uma curva em função não só das frequências, mas também das propriedades físicas do material para que se tenha uma ideia de erros que irão aparecer devido ao tamanho do elemento. Foram escolhidas como parâmetro a velocidade de fase, uma vez que esta é função das propriedades do material, e o comprimento do elemento.

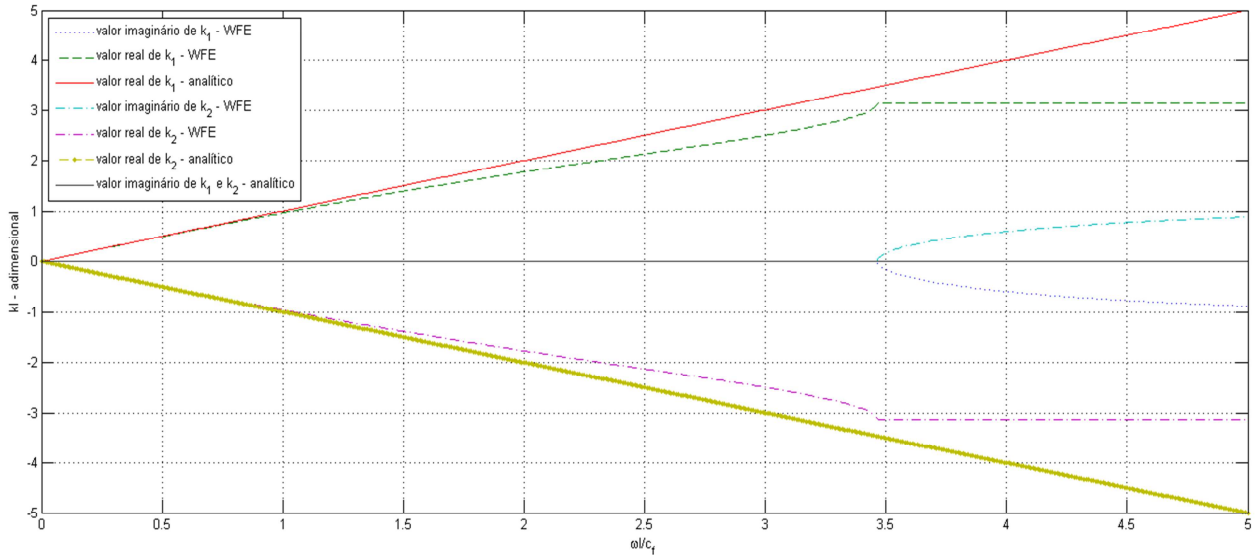


Figura 5.1 – Parte real e parte imaginária dos números de onda de uma barra esbelta, sob movimento longitudinal, encontrado com WFE e solução analítica.

Nota-se que a propagação se dá nas direções positiva e negativa, e é simétrica, uma das condições necessárias para que o WFE possa ser utilizado. Adicionalmente, o método WFE também encontra que após o valor de  $\frac{\omega l}{c_f} = \sqrt{12} \approx 3,4$ , quando  $\lambda^\pm$  passam a ser puramente reais e negativos, Eq. (89), seus logaritmos se tornam números complexos e a onda se torna atenuante, contrariando a teoria.

A Figura 5.2 a seguir relaciona as diferenças entre os valores de  $k$  analítico e WFE e a frequência adimensional para que seja demonstrado o erro percentual que é da forma

$$Erro = \frac{k_{WFE} - k_{Analítico}}{k_{Analítico}}. \quad (98)$$

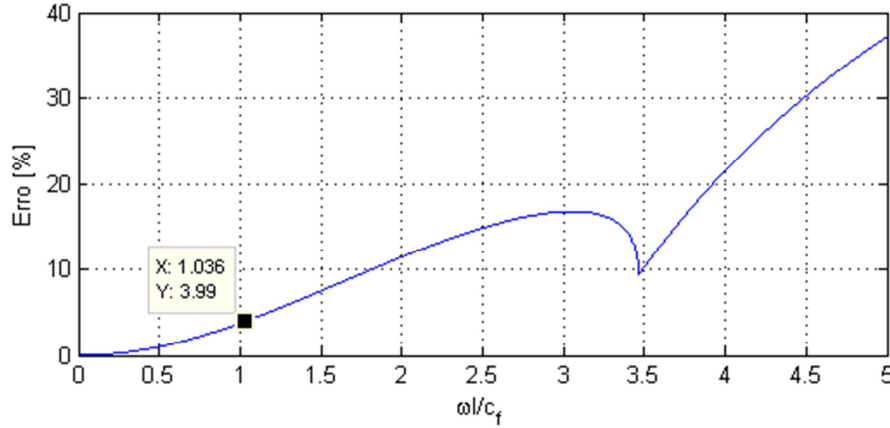


Figura 5.2 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico

Definindo que um erro aceitável deve ser menor que 4%, o modelo é válido apenas até valores de frequência em que  $\frac{\omega l}{c_f} \cong 1$ , ou seja,  $\omega \cong \frac{c_f}{l}$ . Portanto, os erros associados a  $\frac{\omega l}{c_f} = \sqrt{12} \approx 3,4$  são tão grandes que não faria sentido usar o WFE de qualquer modo.

## 5.2. Viga Euler-Bernoulli

As relações de dispersão são encontradas através das curvas de número de onda por frequência. Os resultados encontrados através do WFE, obtidos através dos autovalores  $\lambda^\pm$  da matriz de transferência  $\mathbf{T}$  da eq. (93) e a identidade  $\log(\lambda^\pm) = -jk^\pm l$ , são comparados ao resultado analítico da eq. (33). As Figuras 5.3 e 5.5 mostram os resultados obtidos com ambos WFE e solução analítica adimensionalizadas e sem amortecimento, enquanto as Figuras 5.4 e 5.6 relacionam o erro da mesma forma que definido na Eq. (98).

Novamente a adimensionalização foi feita de modo que fosse obtida uma curva em função não só das frequências, mas também das propriedades materiais, porém, como vimos na eq. (35), a velocidade de fase em uma viga Euler-Bernoulli varia com a frequência, por isso escolhemos multiplicar à frequência o quadrado do valor  $c_{b0} = \sqrt[4]{\frac{\tilde{E}I}{\rho S}}$ , onde  $c_{b0}$  não é a velocidade de fase mas apenas o fator constante de sua equação, também multiplicando pelo tamanho da célula ao quadrado. Apenas os resultados positivos são apresentados, uma vez que se sabe que os números de ondas serão simétricos nas duas direções.

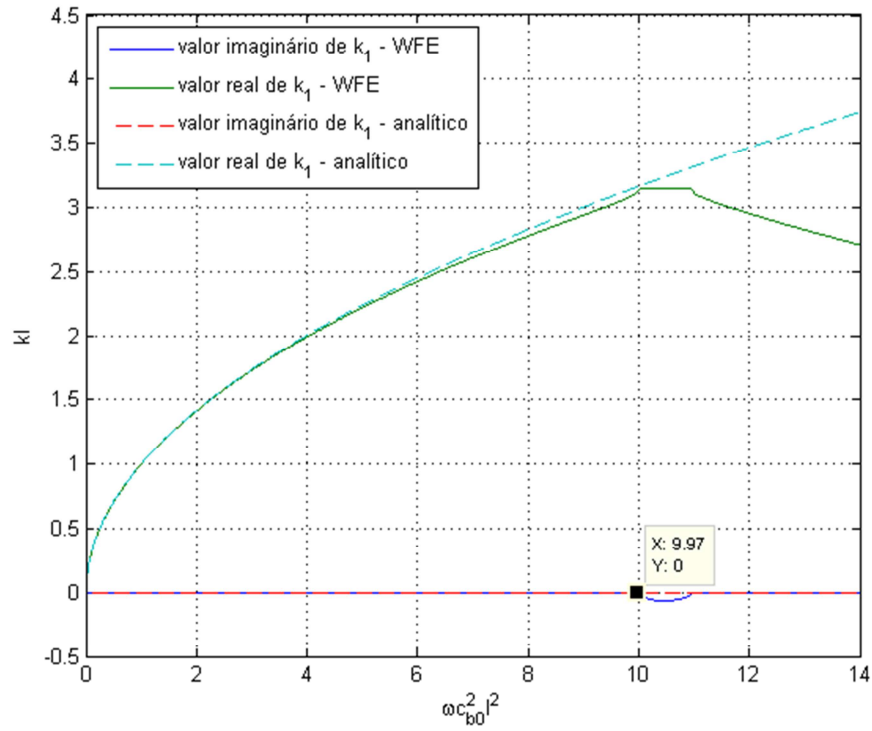


Figura 5.3 – Parte real da relação de dispersão para viga com propagação flexural obtida via WFE e a solução analítica. Onda puramente propagativa.

Assim como ocorreu no primeiro exemplo, enquanto a onda teórica é puramente propagativa, o método WFE prevê uma atenuação a partir de  $\omega \left(\frac{l}{c_f}\right)^2 \cong 9,97$ , porém, desta vez a atenuação só ocorre em um breve intervalo de frequências e fora dele  $\lambda$  é complexo.

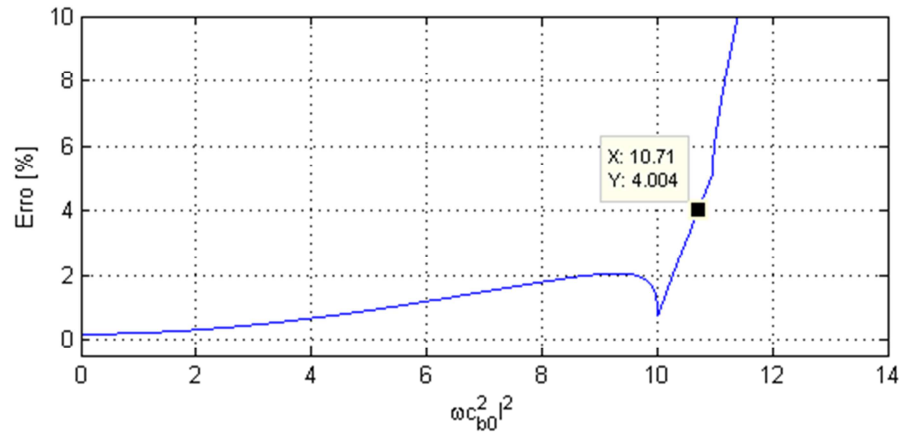


Figura 5.4 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas propagantes.

Definindo novamente um erro de 4% como aceitável, verificamos que o limite de frequência seria  $\omega \left(\frac{l}{c_f}\right)^2 \cong 10,71$ , ou seja,  $\omega \cong 10,71 \left(\frac{c_f}{l}\right)^2$ , porém como já foi constatado, a analogia deixa de funcionar a partir de  $\omega \cong 9,97 \left(\frac{c_f}{l}\right)^2$  e portanto este resultado toma precedência.

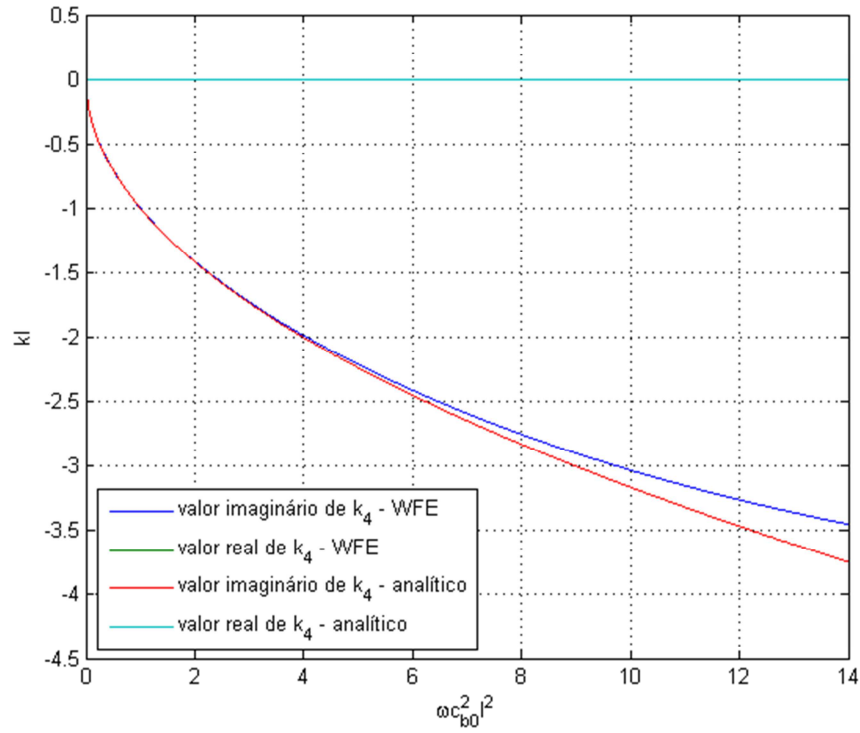


Figura 5.5 - Parte imaginária da relação de dispersão para viga com propagação flexural obtida via WFE e a solução analítica. Onda puramente evanescente.

O modo de propagação  $k_4$ , e por consequência, sua simétrica  $k_3$ , com números de onda puramente imaginários, representam ondas evanescentes. Neste caso a analogia entre o resultado analítico e o resultado do WFE estão de acordo quanto à forma da onda por todo o domínio.

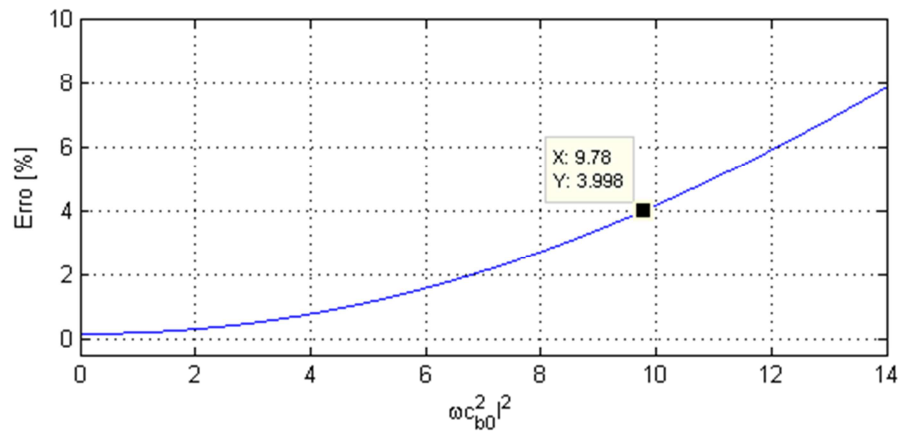


Figura 5.6 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas evanescentes.

Como podemos verificar na Figura 5.4, no entanto, os erros crescem um pouco mais rápido, de modo que o limite arbitrado de 4% de desvio é alcançado quando  $\omega \left(\frac{l}{c_f}\right)^2 \cong 9,78$ . Em vista destes resultados, pode-se dizer que o método é aceitável para valores de  $\omega < 10 \left(\frac{c_f}{l}\right)^2$ , tendo em mente que este último valor já está no limite.

### 5.3. Placa fina e esbelta

Neste exemplo foram aplicadas propriedades típicas do alumínio, para aproximação de um caso real, assim como algumas propriedades geométricas de tamanho arbitrário, como mostradas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades da placa infinita de alumínio.

Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade (N/m <sup>2</sup> )	$7,1 \times 10^{10}$
Constante de Poisson	0,332
Largura (m)	1
Espessura (m)	0,006
Massa específica (kg/m <sup>3</sup> )	2700

As relações de dispersão são as curvas de número de onda por frequência. Os resultados encontrados via WFE, i.e. pelos autovalores  $\lambda^\pm$  da matriz de transferência  $\mathbf{T}$  junto com a identidade  $\log(\lambda^\pm) = -jk^\pm l$ , são comparados com os resultados analíticos das Eqs. (33). As Figuras 5.7 e 5.8 mostram os resultados obtidos com ambos WFE e solução analítica utilizando as propriedades definidas na Tabela 5.1, enquanto as Figuras 5.9 e 5.11 mostram o erro da mesma forma que definido na Eq. (98).

Os valores das frequências de corte analíticas, encontradas via equação (44), e numéricas via WFE, são mostradas na Tabela 5.2

Tabela 5.2 – Frequências de corte analíticas e encontradas.

Modo de onda	Frequência de corte analítica (Hz)	Frequência de corte via WFE (Hz)
1º.	14,79	14,79
2º.	59,16	59,18
3º.	133,1	133,3

A partir das figuras 5.7 e 5.8, verifica-se que os valores da frequência de corte encontradas por WFE são muito próximos dos valores analíticos, porém já se pode verificar visualmente uma diferença nos valores de abaixo da primeira frequência de corte.

Para as ondas propagantes, verifica-se um erro inicialmente alto que decresce rapidamente, até a primeira frequência de corte. Após isso a medida de erro tende ao infinito, devido à sua própria definição, quando o valor analítico chega próximo de zero. Do ponto de vista prático, esse tipo de erro pode ser ignorado, uma vez que a diferença absoluta entre os valores não se altera significativamente.

Finalmente, após a frequência de corte, o erro se aproxima de uma assintótica, mantendo um valor constante pelo restante do intervalo sendo estudado.

No caso das ondas evanescentes, também ocorre o pico de erro inicial, mas neste caso o erro

começa a se aproximar da assintótica quase imediatamente. No entanto, desde o segundo modo das ondas evanescentes, o erro ultrapassa os 4% em todos os momentos, o que significa que a modelagem para esse tipo de onda requer malhas muito mais finas.

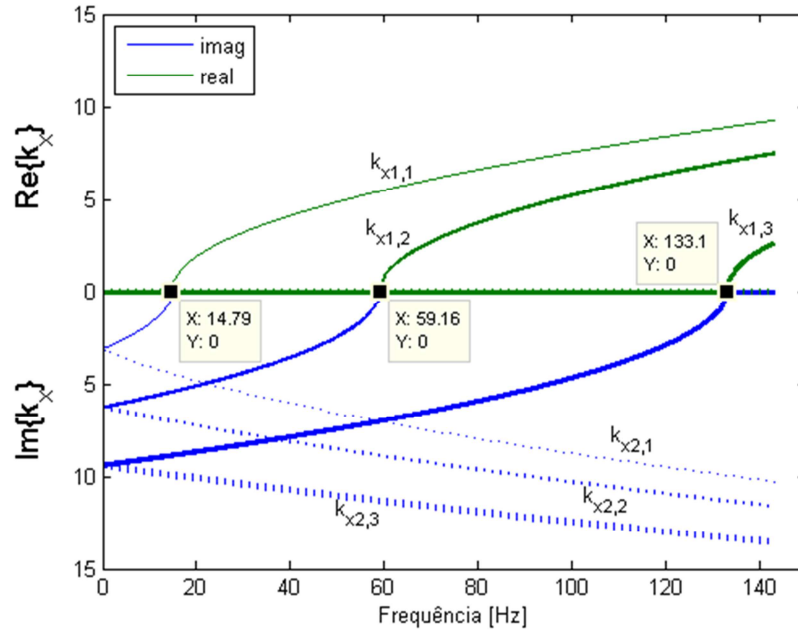


Figura 5.7 – Curvas de dispersão dos resultados analíticos para os três primeiros modos de propagação no sentido positivo de  $x$ .

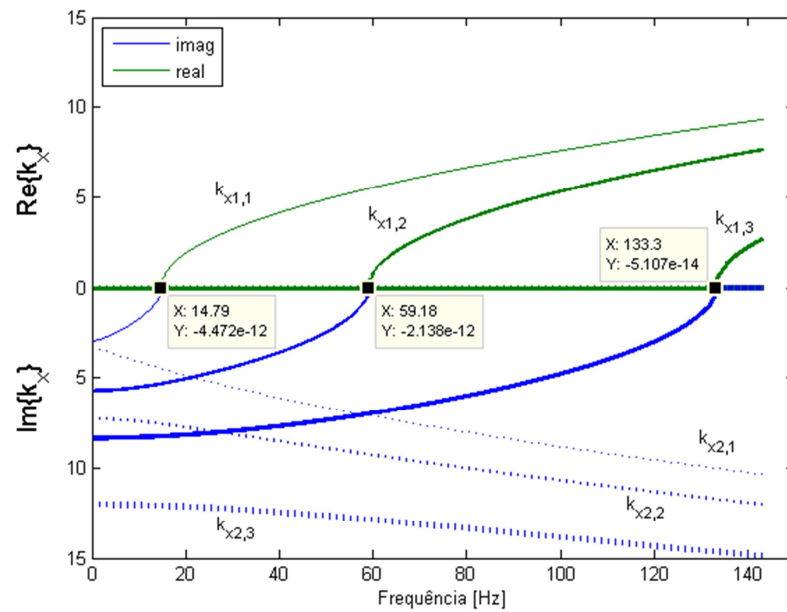


Figura 5.8 – Curvas de dispersão dos resultados por WFE para os três primeiros modos de propagação no sentido positivo de  $x$ .



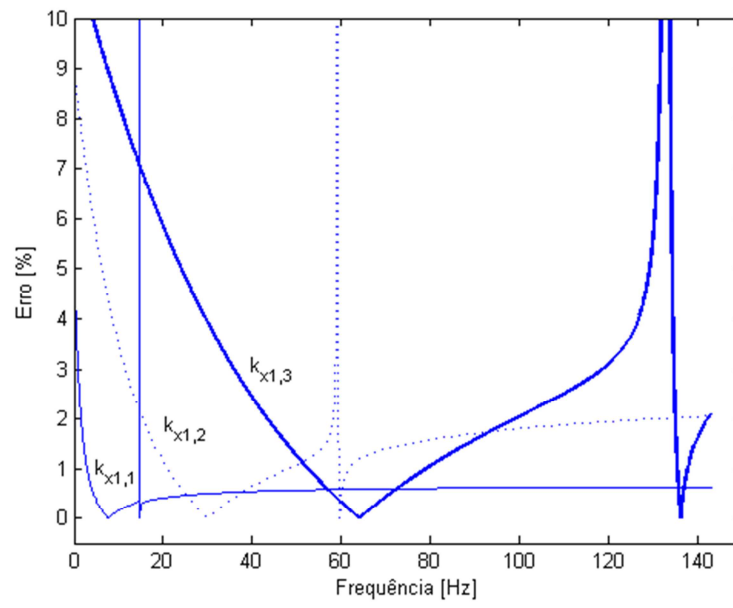


Figura 5.9 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas propagantes.

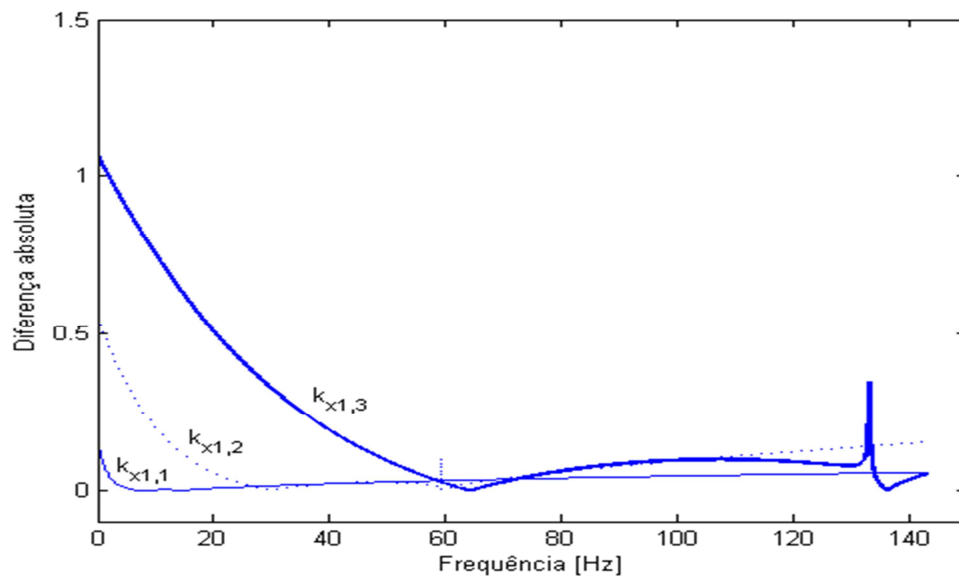


Figura 5.10 – Erro absoluto entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas propagantes

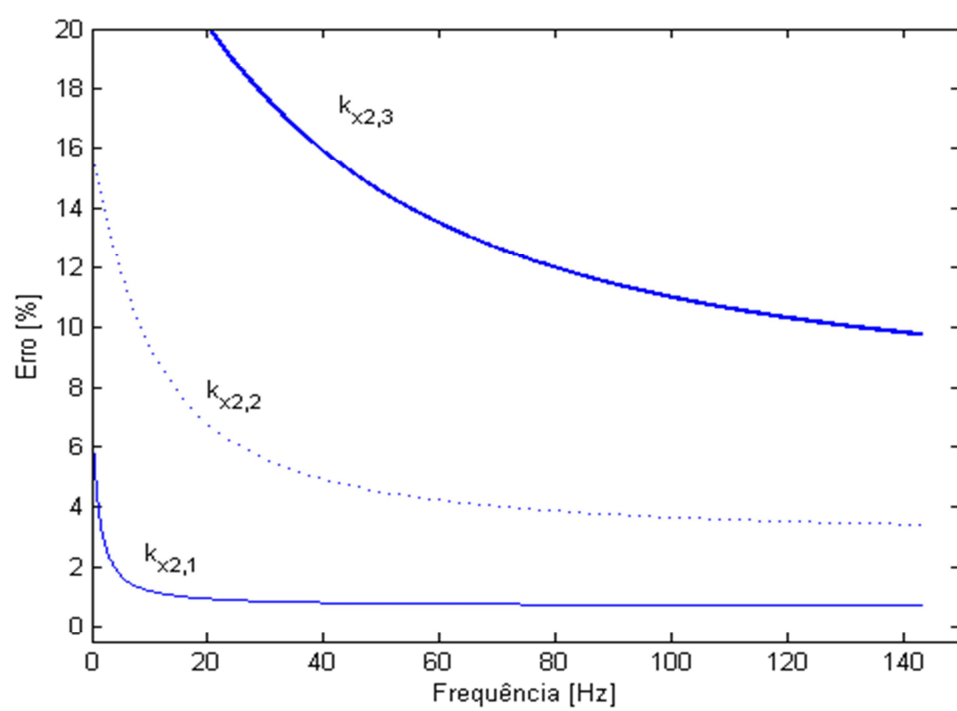


Figura 5.11 – Erro percentual entre o valor do WFE e o valor analítico para as ondas evanescentes.

## 6. Conclusões e passos futuros

Neste trabalho, realizou-se a verificação da capacidade de o WFE ser utilizado como ferramenta na análise de corpos vibrantes, mais especificamente em guias de ondas. Nas primeiras seções verificamos as bases matemáticas e físicas que fundamentam as teorias de propagação de onda e modelagem por elementos finitos, em seguida o método foi descrito.

Em seguida o método foi aplicado a barras e vigas retas e a uma placa fina simplesmente apoiada, tendo estes resultados sido comparados às soluções analíticas disponíveis, criando alguns limites máximos de frequências a partir das quais o método perde precisão.

É importante enfatizar que, ao mesmo tempo em que o método WFE torna o estudo extremamente simples, ele possui a restrição de que a aplicação deste está limitada a estruturas periódicas. Não devemos, no entanto, nos deixar intimidar por esta afirmação uma vez que, apesar de ser em princípio bastante limitante, existem várias aplicações reais que permitem a utilização deste modelo.

Este trabalho se concentrou em demonstrar matematicamente a viabilidade do método, de modo que o próximo passo será a expansão deste método para guias de ondas com seção transversal de complexidade arbitrária, tipicamente compósitos laminados e sanduíche, fuselagem com reforço estrutural, etc., comparando diretamente os resultados não apenas analíticos, quando houverem, mas também aos resultados de outros métodos típicos disponíveis na literatura.

Outro passo natural é utilizar os resultados obtidos para cálculo de resposta dinâmica livre e forçada de estruturas finitas. A análise de estruturas finitas requer também o cálculo das matrizes de reflexão, definindo os contornos das estruturas e o cálculo das amplitudes das ondas diretamente geradas pelo forçamento.

## Referências Bibliográficas

- ABRAHAMSON, A. L. The Response of Periodic Structures to Aero-acoustic Pressures, with Particular Reference to Aircraft Skin-rib Spar Structures. [s.l.] University of Southampton, 1973.
- ACHENBACH, J. Wave Propagation in Elastic Solids. [s.l.] Elsevier, 1984.
- ALLEMANG, R. J. The Modal Assurance Criterion (MAC): Twenty Years of Use and Abuse. Sound and vibration Magazine, v. 37, p. 8, ago. 2003.
- ASIRI, S. A.; AL-ZAHRANI, Y. Z. Theoretical Analysis of Mechanical Vibration for Offshore Platform Structures. World Journal of Mechanics, v. 4, n. 1, p. 11, 20 jan. 2014.
- BAO, J.; SHI, Z.; XIANG, H. Dynamic Responses of a Structure with Periodic Foundations. Journal of Engineering Mechanics, v. 138, n. 7, p. 761–769, 2012.
- BRILLOUIN, L. Wave Propagation in Periodic Structures. [s.l.] Dover Publications Inc., 1946.
- FAHY, F. J.; GARDONIO, P. Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response. [s.l.] Academic Press, 2007.
- GUPTA, S. et al. A coupled periodic FE-BE model for ground-borne vibrations from underground railways. In: MOTASOARES, C. A. et al. (Eds.). . III European Conference on Computational Mechanics. [s.l.] Springer Netherlands, 2006. p. 212–212.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. Theory of Elasticity. [s.l.] Elsevier, 1986.
- MACE, B. R. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures, ISVR technical memorandum 922, 2003
- NEMAT-NASSER, S. General variational methods for waves in elastic composites. Journal of Elasticity, v. 2, n. 2, p. 73–90, 1 jun. 1972.
- PETTYT. Introduction to Finite Element Vibration Analysis. 2 edition ed. [s.l.] Cambridge University Press, 2011.
- RYUE, J. et al. Wave Propagation in Railway Tracks at High Frequencies. In: SCHULTE-WERNING, B. et al. (Eds.). . Noise and Vibration Mitigation for Rail Transportation Systems. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 440–446.
- RYUE, J. et al. Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies. Journal of Sound and Vibration, v. 320, n. 4-5, p. 955–976, mar. 2009.
- SUN, C.-T.; ACHENBACH, J. D.; HERRMANN, G. Time-Harmonic Waves in a Stratified Medium Propagating in the Direction of the Layering. Journal of Applied Mechanics, v. 35, n. 2, p. 408–411, 1 jun. 1968.

WAKI, Y. On the application of finite element analysis to wave motion in one-dimensional waveguides. Doctoral Thesis—Institute of Sound and Vibration Research: University of Southampton, dez. 2007.

### Programa para verificação de relação de dispersão de barra esbelta:

```

%% Saneamento
clc
clear all

%% Dados
E=1;
S=1;
l=1;
rho=1;
eta=0;
Eb=(1+i*eta)*E;
c_f=sqrt(Eb/rho);
w=0:0.001:5;
k=((rho.*w.^2)/Eb).^0.5;

%% Matrizes
Ke=Eb*S*[1 -1;-1 1]/l
Me=rho*S*l*[2 1;1 2]/6

%% Matrizes auxiliares para o WAC
WMn=[0 0;0 0];
WAC=[1 0;0 1];

%% Início do Loop
for j=1:length(w)

%% Matriz de Transferência

    De=Ke-(w(j)^2)*Me;
    n=length(De)/2;
    Dll=De(1:n,1:n);
    Dlr=De(1:n,(n+1):2*n);
    Drl=De((n+1):2*n,1:n);
    Drr=De((n+1):2*n,(n+1):2*n);
    T=[-(Dlr^-1)*Dll Dlr^-1;-Drl+Drr*(Dlr^-1)*Dll -Drr*Dlr^-1];

    AT=eig(T);
    [WM,EV]=eig(T);

%% WAC
    if j>2
        M1=(WM'*WMn).^2;
        M2=(WM'*WM);
        M3=(WMn'*WMn);
        for p=1:2*n
            for q=1:2*n
                WAC(p,q)=abs(M1(p,q)/(M2(p,p)*M3(q,q)));
            end
        end
    end

%% Autovalores
    if abs(real(WAC(1,1)))>abs(real(WAC(1,2)))
        lambda1(j)=EV(1,1);
    end
end

```

```

        lambda2(j)=EV(2,2);
    else
        lambda1(j)=EV(2,2);
        lambda2(j)=EV(1,1);
    end
    WMn = WM*bsxfun(@eq, WAC, max(WAC,[],2));

%% Fim do Loop
end

kWFE1=log(lambda1)/i;
kWFE2=log(lambda2-0.00000000001*i)/i;

%% Plots
w=w*1/c_f;

figure(1)
plot(w,imag(kWFE1),w,real(kWFE1),w,real(k*1),...
     w,imag(kWFE2),w,real(kWFE2),...
     w,real(-k*1),w,imag(k*1))
grid on
ylabel('k1')
xlabel('\omegal/c_f')
legend('valor imaginário de k_1 - WFE','valor real de k_1 - WFE',...
      'valor real de k_1 - analítico',...
      'valor imaginário de k_2 - WFE','valor real de k_2 - WFE',...
      'valor real de k_2 - analítico',...
      'valor imaginário de k_1_-2 - analítico','location','northwest')

figure(2)
plot(w,abs(100*(imag(log(lambda1))-real(k*1))./real(k*1)))
grid on
ylabel('Erro [%]')
xlabel('\omegal/c_f')

```

## Programa para verificação de relação de dispersão de viga Euler-Bernoulli

```

%% Saneamento
clc
clear

%% Dados
E=1;
l=1;
b=1;
h=1;
S=b*h;
I=1;
rho=1;
eta=0;
Eb=(1+i*eta)*E;
mf=14;
w=0:0.01:mf;
k=1*((rho*S.*w.^2)/(Eb*I)).^0.5;

%% Matrizes de Rigidez e Massa
Ke=E*I*[12 6*1 -12 6*1;6*1 4*1*1 -6*1 2*1*1;...
        -12 -6*1 12 -6*1;6*1 2*1*1 -6*1 4*1*1]/(1^3);

```

```

Me=rho*S*1*[153 22*1 54 -13*1;22*1 4*1*1 13*1 -3*1*1;...
54 13*1 156 -22*1;-13*1 -3*1*1 -22*1 4*1*1]/420;

%% Matrizes auxiliares para o WAC
WMn=eye((length(Ke)));
WAC=eye((length(Ke)));

%% Loop
for j=1:length(w)

%% Matriz de Transferência
De=Ke-(w(j)^2)*Me;
n=length(De)/2;
Dll=De(1:n,1:n);
Dlr=De(1:n,(n+1):2*n);
Drl=De((n+1):2*n,1:n);
Drr=De((n+1):2*n,(n+1):2*n);

T=[-(Dlr^-1)*Dll Dlr^-1;-Drl+Drr*(Dlr^-1)*Dll -Drr*Dlr^-1];

AT=eig(T);
[WM,EV]=eig(T);

%% WAC
if j>2
M1=(WM'*WMn).^2;
M2=(WM'*WM);
M3=(WMn'*WMn);
for p=1:2*n
for q=1:2*n
WAC(p,q)=M1(p,q)/(M2(p,p)*M3(q,q));
end
end
end

%% Autovalores
Aux=bsxfun(@eq, WAC, max(WAC,[],1));
TT=Aux'*EV*Aux;
lambda1(j)=TT(1,1);
lambda2(j)=TT(2,2);
lambda3(j)=TT(3,3);
lambda4(j)=TT(4,4);
WMn = WM*Aux;

%% Fim do Loop
end

%% Valores Analíticos de Número de Onda

Ka1=sqrt(k*1);
Ka2=-sqrt(k*1);
Ka3=i*sqrt(k*1);
Ka4=-i*sqrt(k*1);
Ka=[Ka1;Ka2;Ka3;Ka4];

Lamb=log([lambda1;lambda2;lambda3;lambda4])/i;

%% MAC
for p=1:2*n

```



```

    for q=1:2*n
MAC(p,q)=Ka(p,:)*Lamb(q,:)' / ((Ka(p,:)*Ka(p,:))'*(Lamb(q,:)*Lamb(q,:))');
    end
end
MAC=real(MAC);
Aux=bsxfun(@eq, MAC, max(MAC,[],1));

Lambda=Aux*Lamb;

%% Plots
w=w*1^2*sqrt(Eb*I/(rho*S));

figure(1)
plot(w,imag(Lambda(1,:)),w,real(Lambda(1,:)),w,imag(Ka1),w,real(Ka1))
grid on
ylabel('k1')
xlabel('\omegac_b_0^2l^2')
axis([0 mf -.5 4.5])
legend('valor imaginário de k_1 - WFE','valor real de k_1 - WFE',...
'valor imaginário de k_1 - analítico','valor real de k_1 -
analítico',...
'location','northwest')

figure(2)
plot(w,abs(100*(real(Lambda(1,:))-real(Ka1))./real(Ka1)))
grid on
ylabel('Erro [%]')
xlabel('\omegac_b_0^2l^2')
axis([0 mf -.5 10])

figure(3)
plot(w,imag(Lambda(4,:)),w,real(Lambda(4,:)),w,imag(Ka4),w,real(Ka4))
grid on
ylabel('k1')
xlabel('\omegac_b_0^2l^2')
axis([0 mf -4.5 .5])
legend('valor imaginário de k_4 - WFE','valor real de k_4 - WFE',...
'valor imaginário de k_4 - analítico','valor real de k_4 -
analítico',...
'location','southwest')

figure(4)
plot(w,abs(100*(imag(Lambda(3,:))-imag(Ka3))./imag(Ka3)))
grid on
ylabel('Erro [%]')
xlabel('\omegac_b_0^2l^2')
axis([0 mf -.5 10])

```

### Programa para verificação de relação de dispersão de placa infinita simplesmente apoiada

```

%% Saneamento
clc
clear

tic

```

```

PlateDefinition
BendingPlate

tam=length(FEAdata.K);

Ke_aux=FEAdata.K;
Ke_aux2=zeros(tam);

Me_aux=FEAdata.M;
Me_aux2=zeros(tam);

Ke_aux2(1,:)=Ke_aux(1,:);
Ke_aux2((tam/2-2),:)=Ke_aux((tam-3),:);
Ke_aux2((tam/2-1),:)=Ke_aux(3,:);
Ke_aux2((tam-4),:)=Ke_aux((tam-1),:);

Me_aux2(1,:)=Me_aux(1,:);
Me_aux2((tam/2-2),:)=Me_aux((tam-3),:);
Me_aux2((tam/2-1),:)=Me_aux(3,:);
Me_aux2((tam-4),:)=Me_aux((tam-1),:);

for k=1:(tam-8)/6
    Ke_aux2((3*k-1):(3*k+1),:)=Ke_aux((6*k-1):(6*k+1),:);
    Ke_aux2((3*k-3+tam/2):(3*k-1+tam/2),:)=Ke_aux((6*k+2):(6*k+4),:);
    Me_aux2((3*k-1):(3*k+1),:)=Me_aux((6*k-1):(6*k+1),:);
    Me_aux2((3*k-3+tam/2):(3*k-1+tam/2),:)=Me_aux((6*k+2):(6*k+4),:);
end

Ke(:,1)=Ke_aux2(:,1);
Ke(:,(tam/2-2))=Ke_aux2(:,(tam-3));
Ke(:,(tam/2-1))=Ke_aux2(:,3);
Ke(:,(tam-4))=Ke_aux2(:,(tam-1));

Me(:,1)=Me_aux2(:,1);
Me(:,(tam/2-2))=Me_aux2(:,(tam-3));
Me(:,(tam/2-1))=Me_aux2(:,3);
Me(:,(tam-4))=Me_aux2(:,(tam-1));

for k=1:(tam-8)/6
    Ke(:,(3*k-1):(3*k+1))=Ke_aux2(:,(6*k-1):(6*k+1));
    Ke(:,(3*k-3+tam/2):(3*k-1+tam/2))=Ke_aux2(:,(6*k+2):(6*k+4));
    Me(:,(3*k-1):(3*k+1))=Me_aux2(:,(6*k-1):(6*k+1));
    Me(:,(3*k-3+tam/2):(3*k-1+tam/2))=Me_aux2(:,(6*k+2):(6*k+4));
end

tam=tam-4;

Ke=Ke(1:tam,1:tam);
Me=Me(1:tam,1:tam);

mf=900;
w=.01:0.01:mf;

%% Matrices auxiliares para o WAC
WMn=eye((length(Ke)));
WAC=eye((length(Ke)));

```

```
%Id=eye((length(Ke)/2));

%% Loop
for j=1:length(w)

%% Matriz de Transferência
De=Ke-(w(j)^2)*Me;
n=length(De)/2;
Dl1=De(1:n,1:n);
Dlr=De(1:n,(n+1):2*n);
Drl=De((n+1):2*n,1:n);
Drr=De((n+1):2*n,(n+1):2*n);

T=[-Dlr\Dl1 Dlr\Id;-Drl+Drr*(Dlr\Dl1) -Drr*(Dlr\Id)];

[WM,EV]=eig(T);
% EV=diag(EV);
%% WAC
if j>2
M1=(WM'*WMn).^2;
M2=(WM'*WM);
M3=(WMn'*WMn);
for p=1:2*n
for q=1:2*n
WAC(p,q)=M1(p,q)/(M2(p,p)*M3(q,q));
end
end
end

%% Autovalores
Aux=bsxfun(@eq,WAC,max(WAC,[],1));
TAux=zeros(length(Aux))+Aux;
det(TAux);
if abs(det(TAux))<0.001
for p=1:2*n
for q=1:2*n
if q~=p & TAux(:,p)==TAux(:,q)
Aux(:,p)=Aux2(:,p);
Aux(:,q)=Aux2(:,q);
else
if q~=p & TAux(p,:)==TAux(q,:)
Aux(p,:)=Aux2(p,:);
Aux(q,:)=Aux2(q,:);
end
end
end
end
end
Aux2=Aux;
TT=Aux'*EV*Aux;
for k=1:tam
Lamb(k,j)=-log(TT(k,k))/(Plate.l*i);
if abs(Lamb(k,j))<10^(-6)
Lamb(k,j)=0;
end
end
end
WMn = WM*Aux;

%% Fim do Loop
end
```

```

Lamb=real(Lamb)-i*imag(Lamb);

%% Valores Analíticos de Número de Onda

kbp=sqrt(Plate.rho*Plate.t*(1-Plate.nu^2)*12/Plate.Ep/Plate.t^3);

for k=1:tam/4
    Ka(2*k-1,:)=sqrt(kbp*w-ones(size(w))*(k*pi/Plate.w)^2);
    Ka(2*k,:)=sqrt(-kbp*w-ones(size(w))*(k*pi/Plate.w)^2);
    Ka(tam/2+2*k-1,:)=sqrt(kbp*w-ones(size(w))*(k*pi/Plate.w)^2);
    Ka(tam/2+2*k,:)=sqrt(-kbp*w-ones(size(w))*(k*pi/Plate.w)^2);
    Ka(tam,:)=0*w;
    Ka(tam-1,:)=0*w;
end

rKa=real(Ka);
iKa=imag(Ka);
rLamb=real(Lamb);
iLamb=imag(Lamb);

MAC=eye(length(Ke));

for p=1:2*n
    for q=1:2*n

        rMAC=(rKa(p,:)*rLamb(q,:)).^2/((rKa(p,:)*rKa(p,:))*(rLamb(q,:)*rLamb(q,:)));

        iMAC=i*(iKa(p,:)*iLamb(q,:)).^2/((iKa(p,:)*iKa(p,:))*(iLamb(q,:)*iLamb(q,:)));

        rMAC(isnan(rMAC))=0;
        iMAC(isnan(iMAC))=0;
        MAC(p,q)=rMAC+iMAC;
    end
end
Aux=bsxfun(@eq, MAC, max(MAC,[],2));

Lambda=(Aux*abs(real(Lamb))-i*Aux*abs(imag(Lamb)));

%% Plots

pltstr=['-',':', '-',':', '-',':'];

for k=1:tam
    figure(3)
    plot(w/2/pi,imag(Ka(k,:)),'.',w/2/pi,real(Ka(k,:)), '--', 'MarkerSize',1)
    axis([0 150 -30 30])
    legend('imag','real','location','northwest')
    % ylabel('Im\{k_x\} Re\{k_x\}', 'FontSize',14)
    % xlabel('Frequência [Hz]')
    set(gca,'Xtick',0:20:150)
    hold on
end

for k=1:6
    figure(4)

```

```

plot(w/2/pi, imag(Lambda(k,:)), pltstr(k), w/2/pi, real(Lambda(k,:)), pltstr(k),
'linewidth', 0.6+k*0.4)
axis([0 150 -15 15])
legend('imag', 'real', 'location', 'northwest')
ylabel('Im\{k_x\} Re\{k_x\}', 'FontSize', 14)
xlabel('Frequência [Hz]')
set(gca, 'Xtick', 0:20:150)
hold on
end

for k=1:6
figure(5)
plot(w/2/pi, -,
imag(Ka(k,:)), pltstr(k), w/2/pi, real(Ka(k,:)), pltstr(k), 'linewidth', 0.6+k*0.4)
axis([0 150 -15 15])
legend('imag', 'real', 'location', 'northwest')
ylabel('Im\{k_x\} Re\{k_x\}', 'FontSize', 14)
xlabel('Frequência [Hz]')
set(gca, 'Xtick', 0:20:150)
hold on
end

for k=1:3
figure(6)
plot(w/2/pi, abs(100*(Lambda(2*k-1,:) - (conj(Ka(2*k-1,:))))./conj(Ka(2*k-1,:))), pltstr(k), 'linewidth', 0.6+k*0.4)
ylabel('Erro [%]')
xlabel('Frequência [Hz]')
set(gca, 'Xtick', 0:20:150)
axis([0 150 -.5 10])
hold on
end

for k=1:3
figure(7)
plot(w/2/pi, abs(100*(Lambda(2*k,:) - (conj(Ka(2*k,:))))./conj(Ka(2*k,:))), pltstr(k), 'linewidth', 0.6+k*0.4)
ylabel('Erro [%]')
xlabel('Frequência [Hz]')
set(gca, 'Xtick', 0:20:150)
axis([0 150 -.5 20])
hold on
end

for k=1:3
figure(8)
plot(w/2/pi, abs(Lambda(2*k-1,:) - (conj(Ka(2*k-1,:))))./conj(Ka(2*k-1,:))), pltstr(k), 'linewidth', 0.6+k*0.4)
ylabel('Diferença absoluta')
xlabel('Frequência [Hz]')
set(gca, 'Xtick', 0:20:150)
axis([0 150 -.1 1.5])
hold on
end

for k=1:3
figure(9)

```

```

plot(w/2/pi,abs(Lambda(2*k,:)-
(conj(Ka(2*k,:))))),pltstr(k),'linewidth',0.6+k*0.4)
ylabel('Diferença absoluta')
xlabel('Frequência [Hz]')
set(gca,'Xtick',0:20:150)
axis([0 150 -.5 5])
hold on
end

toc

```

### Submatrizes da matriz de massa de elemento retangular

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{11} &= \begin{bmatrix} 3454 & & & & & sym \\ 461l_y & 80l_y^2 & & & & \\ -461l_x & -63l_xl_y & 80l_x^2 & & & \\ 1226 & 199l_y & -274l_x & 3454 & & \\ 199l_y & 40l_y^2 & -42l_xl_y & 461l_y & 40l_y^2 & \\ 274l_x & 42l_xl_y & -60l_x^2 & 461l_x & 63l_xl_y & 40l_x^2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{m}_{21} &= \begin{bmatrix} 394 & 166l_y & -166l_x & 1226 & 274l_y & 199l_x \\ -166l_y & -30l_y^2 & 28l_xl_y & -274l_y & -60l_y^2 & 42l_xl_y \\ 166l_x & 28l_xl_y & -30l_x^2 & -199l_x & 42l_xl_y & 40l_x^2 \\ 1226 & 274l_y & 199l_x & 394 & 166l_y & -166l_x \\ -274l_y & -60l_y^2 & 42l_xl_y & -166l_y & -30l_y^2 & 28l_xl_y \\ -199l_x & 42l_xl_y & 40l_x^2 & 166l_x & 28l_xl_y & -30l_x^2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{m}_{22} &= \begin{bmatrix} 3454 & & & & & sym \\ -461l_y & 80l_y^2 & & & & \\ 461l_x & -63l_xl_y & 80l_x^2 & & & \\ 1226 & -199l_y & 274l_x & 3454 & & \\ -199l_y & 40l_y^2 & -42l_xl_y & -461l_y & 40l_y^2 & \\ -274l_x & 42l_xl_y & -60l_x^2 & -461l_x & 63l_xl_y & 40l_x^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### Submatrizes da matriz de rigidez de elemento retangular

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{11} &= \begin{bmatrix} 4(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{2}{5}(7 - 2\nu) & & & & & sym \\ \left[\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\right]l_y & \left[\frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)\right]l_y^2 & & & & \\ -\left[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - 4\nu)\right]l_x & \nu l_xl_y & & \left[\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)\right]l_y^2 & & \end{bmatrix} \\
\mathbf{k}_{21} &= \begin{bmatrix} -\left[2(2\beta^2 - \alpha^2) + \frac{2}{5}(7 - 2\nu)\right] & \left[\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\right]l_y & \left[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - 4\nu)\right]l_x \\ \left[\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\right]l_y & \left[\frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu)\right]l_y^2 & 0 \\ -\left[2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - 4\nu)\right]l_x & 0 & \left[\frac{2}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1 - \nu)\right]l_y^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{31} = \begin{bmatrix} -\left[2(\beta^2 - \alpha^2) - \frac{2}{5}(7 - 2\nu)\right] & -\left[\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu)\right] l_y & -\left[\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - 4\nu)\right] l_x \\ \left[\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu)\right] l_y & \left[\frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{15}(1 - \nu)\right] l_y^2 & 0 \\ \left[-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)\right] l_x & 0 & \left[\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)\right] l_y^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{41} = \begin{bmatrix} \left[2(\beta^2 - 2\alpha^2) - \frac{2}{5}(7 - 2\nu)\right] & \left[\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\right] l_y & \left[-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\right] l_x \\ \left[\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu)\right] l_y & \left[\frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{15}(1 - \nu)\right] l_y^2 & 0 \\ \left[-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\right] l_x & 0 & \left[\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu)\right] l_y^2 \end{bmatrix}$$

Onde

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y}, \quad \beta = \frac{l_y}{l_x}.$$

Definindo as seguintes matrizes

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

As matrizes restantes serão dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{22} &= \mathbf{I}_3^T \mathbf{k}_{11} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{k}_{32} &= \mathbf{I}_3^T \mathbf{k}_{41} \mathbf{I}_3 & \mathbf{k}_{33} &= \mathbf{I}_1^T \mathbf{k}_{11} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{k}_{42} &= \mathbf{I}_3^T \mathbf{k}_{31} \mathbf{I}_3 & \mathbf{k}_{43} &= \mathbf{I}_1^T \mathbf{k}_{21} \mathbf{I}_1 & \mathbf{k}_{44} &= \mathbf{I}_2^T \mathbf{k}_{11} \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$